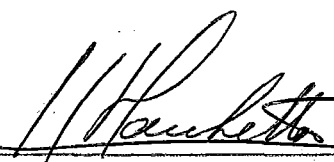


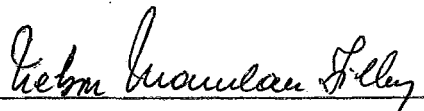
APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE CONTROLE A SISTEMAS  
DE PRODUÇÃO

Adalberto Lovato

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M. Sc.)

Aprovada por:

  
Presidente





RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL  
AGOSTO DE 1972

## Agradecimento

A Henri Marchetta, pela orientação.

A Hamilton Nogueira Júnior, pela hospitalidade com que me recebeu durante meus estudos de pós-graduação.

Ao CNPq e à COPPE, pelo apoio financeiro.

A Lola

## RESUMO

Procura-se verificar neste trabalho a aplicabilidade de técnicas de Controle Ótimo a modelos dinâmicos de sistemas de produção. Faz-se uso do princípio do máximo de Pontryagin. São apresentadas algumas interpretações do princípio do máximo e são feitas aplicações a modelos de Dinâmica Industrial. Verifica-se a complexidade das computações necessárias para encontrar o controle ótimo de sistemas de produção. Para os casos lineares é apresentado um método que transforma o problema de controle num problema de programação matemática. O método é baseado na Programação Linear Generalizada. Consegue-se então um algoritmo hierarquizado de dois níveis que torna mais fácil a solução de problemas de controle ótimo de sistemas lineares.

### ABSTRACT

It is intended in this work to verify the applicability of optimal control techniques to dynamic models of production systems. Pontryagin's maximum principle is used. Some interpretations are given and some applications of the maximum principle to Industrial Dynamics models are made. It is verified the great amount of difficulties one has in applying optimal control techniques to production systems. For linear models a method is presented that transforms a control problem into a mathematical programming problem. This method is based on Generalized Linear Programming. A two levels hierarchized algorithm is obtained that makes easier the application of optimal control to linear systems.

## ÍNDICE

CAP. I	INTRODUÇÃO	1
Seção 1	: Introdução .....	1
Seção 2	: Aplicação de princípios de controle a sistemas de produção.....	2
Seção 3	: A Dinâmica Industrial .....	4
Seção 4	: Modelos.....	7
Seção 5	: Notação .....	9
CAP. II	CONTROLE ÓTIMO	10
Seção 1	: Introdução.....	10
Seção 2	: Realização de uma tarefa com prazo fixo e sem restrições quanto ao valor final das variáveis do sistema.....	15
Seção 3	: Realização de uma tarefa com prazo fixo e com restrições quanto ao valor final das variáveis do sistema.....	42
Seção 4	: Execução de tarefas quando o tempo não é especificado.....	73
Seção 5	: Quando as variáveis são discretas:comen- tários.....	80
CAP. III	CONTROLE ÓTIMO DE SISTEMAS LINEARES	82
Seção 1	: Introdução.....	82
Seção 2	: Programação linear generalizada.....	82
Seção 3	: O problema do controle ótimo linear.....	91
CAP. IV	CONCLUSÃO	104
	BIBLIOGRAFIA	107

## CAPITULO I

### INTRODUÇÃO

#### Seção 1 - Introdução.

Sistemas de produção geralmente possuem um grande número de variáveis e um número grande de relações entre elas. O controle de um sistema real deste tipo, na prática quase sempre tem levado à sua decomposição em sub-sistemas, cada um com menor número de variáveis e relações. Geralmente essa decomposição se faz de forma a resultar uma estrutura hierarquizada, que permite melhor aproveitamento dos recursos disponíveis. Os sub-sistemas resultantes da decomposição possuem um número bem menor de variáveis e relações, de forma que se torna viável a aplicação de métodos matemáticos para melhorar suas performances. O problema daí por diante reside na coordenação das performances dos vários sub-sistemas de maneira que seja melhorada a performance global. A resolução deste problema geralmente implica num número grande de cálculos, pois muitas vezes o processo de coordenação é iterativo. Mas o número de cálculos pode não constituir problema quando é possível a utilização de computador digital. Essas mesmas características que acabamos de dizer que possuem os sistemas de produção, também as possuem os chamados sistemas de grande porte. Neste trabalho vamos tratar sistemas de produção como sistemas de grande porte.

Se um sistema possui um número muito grande de variáveis, e é tal que não permite uma decomposição de forma a resultar uma estrutura hierarquizada, muitas vezes não é viável a utilização de computador porque surgem problemas de escassez de memória. A decomposição do sistema em diversos sub-sistemas menores pode muitas vezes resolver este problema. Por isso, quando nos referirmos a um sistema como sendo de grande porte queremos também dizer que ele é tal que permite a sua decom-

posição numa estrutura hierarquizada.

Após o desenvolvimento dos computadores digitais a simulação foi a técnica mais utilizada para tratamento de sistemas de grande porte. Nos últimos anos muito esforço tem sido feito em pesquisa de métodos de programação matemática para aplicação neste tipo de problema.

Nesta tese vamos procurar verificar a aplicabilidade de métodos matemáticos para otimização de sistemas dinâmicos. Como vimos, nossos sistemas de grande porte têm uma estrutura hierarquizada. E como um problema típico de sub-sistemas dessas estruturas é: "executar uma determinada tarefa, durante um determinado tempo, otimizando uma performance"; atacaremos o problema utilizando métodos de controle ótimo. Em particular, a condição de máximo de Pontryagin. Os modelos que vamos usar são de Dinâmica Industrial, que é um método de simulação de sistemas dinâmicos. Faremos um estudo da aplicação da condição de Pontryagin a modelos de Dinâmica Industrial. Este estudo, embora de alguma extensidade, de maneira alguma pretende ser completo.

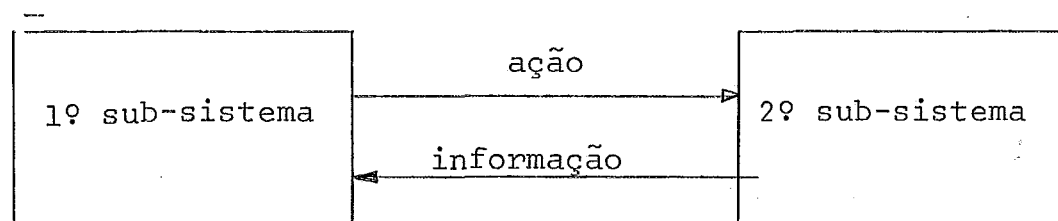
Neste primeiro capítulo falaremos brevemente a respeito da aplicação de princípios de controle a sistemas de produção, da Dinâmica Industrial e de modelos. No capítulo II trataremos da aplicação da condição de Pontryagin a modelos de Dinâmica Industrial. No capítulo III trataremos da aplicação da programação linear generalizada a problemas deste tipo.

## Seção 2 - Aplicação de princípios de controle a sistemas de produção.

Os conceitos de controle que em primeiro lugar aparecem na aplicação a sistemas de grande porte são os de servomecanismos. Vimos que um sistema de grande porte geralmente é decomposto



decomposto em sub-sistemas que têm um número menor de variáveis e relações, e aos quais não é difícil aplicar métodos matemáticos para melhor controlá-los. No entanto, não deixa de haver interações entre esses sub-sistemas. E, em sistemas de grande porte o controle dessas interações pode ser mais importante que o controle de cada sub-sistema isoladamente. Nessas interações estão envolvidos conceitos de servomecanismos, pois um sub-sistema atua sobre outro, que devolve informação ao primeiro, que usa esta informação para decidir novas atuações sobre o segundo, e assim por diante. Isto é, existe uma malha fechada de realimentação de informações. O primeiro sistema decide a atuação sobre o segundo baseado nas informações que tem no presente momento a respeito de todo o passado das interações.



Em sistemas sócio- econômicos qualquer atividade, fabricação, transporte, comunicação, etc., exige um certo tempo para ser realizada. Por exemplo, a comunicação entre dois setores de uma organização pode ser feito por meio de cartas, que gasta bastante tempo. Decisão também toma tempo e a execução da ação decidida também leva tempo. Existe pois, uma seqüência no tempo, das ações dentro de um sistemas. Esta seqüência de ações no tempo pode ser relacionada com os atrasos de tempo de um servo mecanismo.

Quando as vendas de um produto aumentam a direção da companhia toma a decisão de aumentar a produção. Se as vendas aumentaram de 1000 unidades semanais na última semana, a pro-

dução também deverá ser aumentada de 1000 unidades semanais? Não seria melhor aumentar inicialmente só de 500 unidades semanais? Ou seria melhor aumentar logo de 2000 unidades semanais prevendo novos aumentos de vendas? A decisão de aumentar a produção vem acompanhada de uma amplificação que define quantitativamente esse aumento. As amplificações e os atrasos de tempo podem causar oscilações e instabilidades tanto em sistemas sócio-econômicos como em servomecanismos.

### Seção 3 - A Dinâmica Industrial

A notícia mais antiga que temos sobre aplicação de princípios de controle a sistemas sócio-econômicos data de 1952 [12] , é um trabalho de Herbert A. Simon: "Sobre a Aplicação da Teoria dos Servomecanismos ao Estudo do Controle da Produção". A partir dessa época apareceram vários trabalhos e artigos em revistas, mas o assunto nunca chegou a receber muita importância. Em 1961 Jay Forrester publicou um livro sobre a dinâmica de sistemas sócio-econômicos: "Industrial Dynamics". Mais especificamente este livro trata do comportamento dinâmico de organizações industriais. Forrester aliou a aplicação da teoria do Controle Automático e estudos sobre processos de decisão ao desenvolvimento havido em simulação por meio de computadores digitais. E conseguiu desenvolver um método bastante adequado ao tratamento de sistemas de grande porte. A interação dos diversos setores de uma organização industrial - marketing, produção, distribuição, compras, etc., em cujas atividades existem atrasos de tempo, amplificações, realimentações e outras características próprias de controle - são estudadas por meio de simulação e aplicação de conceitos de controle automático. Forrester mostra que as oscilações que muitas vezes ocorrem nos sistemas sócio-econômicos podem ser causadas por

fatores internos do sistema, como a estrutura ou os meios de operação, por atrasos de tempo e amplificações, da mesma forma como ocorre nos sistemas físicos. O método da Dinâmica Industrial consiste essencialmente na construção e simulação de um modelo onde são evidenciados os fatores relacionados com as interações entre os sub-sistemas. No modelo são muito bem representadas as malhas de realimentação de informações, ou malhas causa-efeito ou ainda malhas de decisão-ação-informação-decisão, que mostram como as decisões dependem das informações, como os efeitos dependem da ação e como as informações sobre os efeitos da ação chegam outra vez ao ponto de decisão. Forrester desenvolveu uma rotina de simulação, para uso em computador digital, que simula muito bem amplificações e atrasos de tempo e transporte, de modo a obter uma representação muito boa do comportamento dinâmico de um sistema.

Em 1968, Forrester, fazendo uma análise de seu método, afirmou que antes de ser uma técnica de simulação, a Dinâmica Industrial é uma aplicação dos conceitos da teoria do Controle Automático. Pois o uso da Dinâmica Industrial requer por parte do usuário um conhecimento adequado dessa teoria. Confirmou também que o campo de pesquisa da Dinâmica Industrial consiste no estabelecimento de pontes de ligação entre a teoria do Controle e os sistemas industriais.

Essas são algumas idéias que fundamentaram nossa decisão de aplicar métodos de controle ótimo a sistemas de produção.

Neste trabalho sempre usaremos modelos contínuos, mesmo quando operações do sistema real forem ou parecerem ser discretas. Vamos ver que não é tão grande a diferença ao se tratar sistemas reais como contínuos. Pois dentro de um sistema sócio-econômico existe mais continuidade do que se costuma supôr. A assinatura de um contrato, por exemplo, pode parecer um fenômeno discreto na atividade de uma empresa. Mas certamente essa assinatura foi precedida de negociações, acordos,

estudos, mudanças e preparações dentro da empresa para cumprir com as novas obrigações. A assinatura também é seguida de outras ações como ajustes e consolidação de planos. Quando se inaugura uma nova linha de montagem numa fábrica, ela não começa produzindo a plena capacidade, começa produzindo pouco e vai aumentando gradativamente a produção. Fatos como estes, que ocorrem num sistema de grande porte, podem parecer discretos, mas na verdade são precedidos e seguidos de um conjunto de ações que lhe dão características de continuidade.

Muitas vezes se pretende modelar um sistema como discreto justificando que as informações são obtidas discretamente. Geralmente informações são entradas de um sistema. A informação sobre a quantidade de unidades vendidas no mes anterior é usada pela diretoria da fábrica para decidir a produção do mes seguinte. A decisão neste caso é um fenômeno discreto que ocorre uma vez por mes, mas as variações de produção dentro da linha de fabricação já não se dão de forma tão discreta. por isso não será tão grande a diferença se supusermos a decisão como um fenômeno contínuo. Não pretendemos dizer que devemos ignorar que a troca de informações entre sub-sistemas é discreta, queremos dizer que as ações dentro dos sub-sistemas se dão de forma bem mais contínuas, embora as informações cheguem a eles de forma discreta.

Mesmo quando há fenômenos realmente discretos, um primeiro estudo sobre um modelo contínuo do sistema é sempre útil, pois concentra a atenção sobre características verdadeiramente importantes da operação do sistema, como os objetivos, as inércias, os atrasos de tempo e as amplificações. Desviar a atenção para o caráter discreto dos fenômenos tende a obscurecer essas características. A discretização das variáveis pode ser feita aos poucos, tornando gradativamente o modelo mais complicado e mais fiel ao sistema real.

#### Seção 4 - Modelos

Geralmente sistemas de grande porte são caros e é antieconômica a sua utilização para fazer experiências. O uso de modelos é mais barato. Segundo Eikoff [2], "modelo é uma representação dos aspectos essenciais de um sistema ou processo, susceptível de fornecer informações deste sistema ou processo de uma forma utilizável". Noutras palavras, é uma maneira alternativa de descrever o fenômeno real que permite, sob o ponto de vista do tempo, custo e conveniência, entender a natureza dos resultados a serem esperados do equipamento ou atividade modelada. A construção do modelo tem por objetivo o conhecimento de um sistema sem necessidade de construí-lo ou operá-lo.

Neste estudo estaremos sempre interessados nos modelos matemáticos dinâmicos, adequados ao uso de simulação (Dinâmica Industrial) e à aplicação de princípios de controle. Os modelos dinâmicos são capazes de representar situações que mudam com o tempo e permitir que se determine as decisões que se deve tomar no decorrer do tempo. Nosso objetivo na construção do modelo será o de permitir essa determinação de atuar sobre o sistema. Isto é, de controlar o sistema. E iremos um pouco adiante, pois pretendemos controlá-lo otimamente.

Os métodos matemáticos que se tem aplicado a sistemas sócio-econômicos visam quase que exclusivamente melhorar a performance de operação em regime permanente. A performance de pequenos sistemas durante os transitórios pode não ser um problema importante, mas quando se trata de sistemas de grande porte qualquer transitório ou oscilação merece ser analisada. Por isso, os modelos matemáticos que usaremos aqui serão sempre dinâmicos, capazes de representar tanto os comportamentos transitórios como os de regime permanente.

O primeiro objetivo de um modelo matemático de um sistema é ajudar a entender este sistema. Também tem por objetivo a descrição da organização, das causas e dos fatores que deter-

minam o desenvolvimento do sistema no decorrer do tempo. portanto, deve haver muita correspondência do modelo com a estrutura e com as características operacionais do sistema. O modelo tem menos propósito de fazer predições de determinados eventos em determinados instantes futuros do que de servir de ferramenta básica na tomada de decisões e na determinação da política de controle. Por isso os modelos que usaremos são os de Dinâmica Industrial, porém muito simplificados.

Os modelos serão simplificados porque não podemos pretender mais do que dar uma idéia da maneira de atuar sobre o sistema para controlá-lo otimamente. Quando se trata de sistemas físicos é fácil supor que as condições do meio em que está o sistema não variam enquanto o controlamos. Assim, uma vez calculado o controle ótimo para um determinado período, podemos aplicá-lo durante todo esse período. M

Mas esta suposição, que as condições do meio não mudam, se torna difícil quando se trata de sistemas sócio-econômicos. Por exemplo, uma empresa que tem uma quantidade limitada de recursos estuda um plano para sua aplicação durante dois anos. É formulado um problema de controle ótimo que leva em conta a limitação dos recursos. Se a aplicação, ótima, desses recursos começa a dar bons resultados, é bem possível que pessoas estranhas mostrem interesse em aplicar recursos nesta empresa. Naturalmente essas aplicações vão ser aceitas e a quantidade de recursos disponíveis aumenta. O caso contrário pode ocorrer quando o investimento não se revela bom. Então, em qualquer caso, é muito provável que antes de terminado o prazo de dois anos o programa de investimento tenha que ser reformulado. O que se verificou foi uma influência da empresa sobre o meio. E essa influência provocou uma mudança do meio em relação à empresa e conseqüentemente uma mudança nas restrições do problema.

Por razões desse tipo que a aplicação de controle ótimo a sistemas sócio-econômicos deve pretender ser nada mais do que uma orientação do controle a ser aplicado.

## Seção 5 - Notação

A notação que usaremos procura seguir a notação comumente encontrada em trabalhos das áreas de Controle e de Otimização. Os símbolos de notação e as grandezas que eles representam irão sendo introduzidos durante o texto.

Os vetores serão sempre vetores colunas, a não ser quando transpostos.

Os problemas de otimização de que trataremos serão em quase todos os casos, problemas de minimização. Este fato não tem importância, porque encontrar  $x(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , tal que  $f(x(t))$  seja maximizada é o mesmo problema que encontrar  $x(t)$  que minimize  $-f(x(t))$ .

## CAPITULO II

### CONTROLE ÓTIMO

#### Seção 1 - Introdução

Um sistema dinâmico pode ser descrito por um sistema de equações de estado:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \quad (1)$$

$i=1, 2, \dots, n$

onde  $x_i$  são as variáveis de estado  
 $n$  é a dimensão do espaço de estados  
 $u_j$  são os controles,  $j=1, 2, \dots, r$   
 $r$  é a dimensão do espaço de controles  
 $t$  é o tempo.

Digamos que este sistema faz parte de um sistema maior, do qual é então um sub-sistema. Digamos ainda que o sistema maior tem uma estrutura hierarquizada. Então não é estranho se esperar que o sub-sistema deque estamos tratando receba "ordens" de outro, superior hierarquicamente, da seguinte maneira: "realize uma dada tarefa, durante um tempo determinado, otimizando uma performance"; ou então, "realize uma certa tarefa no menor prazo possível, isto é, otimizando o tempo requerido para executá-la". Para cumprir uma tarefa assim especificada o sub-sistema procura o conjunto de controles  $(u_1(t), \dots, u_r(t))$  que melhor se ajuste ao cumprimento da tarefa. Durante todo este capítulo nosso objetivo será mostrar como se procura um conjunto de controles adequados à realização de certas tarefas exigidas de um sub-sistema.

Um sistema será sempre descrito em termos de espaço, variáveis e equações de estado. Às entradas de um sistema chamaremos de controles. Esses controles formam um espaço



cuja dimensão designaremos por  $r$ . Em forma vetorial os controles podem ser expressos por

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

Nos casos práticos as variáveis de controle são recursos, materiais, mão de obra, etc., variáveis que em geral são limitadas tanto inferior como superiormente. Nos problemas de que trataremos também as consideraremos limitadas, ou seja, consideraremos que pertencem a uma região fechada, convexa, e limitada do espaço das variáveis de controle. Essas regiões  $U$  serão definidas por desigualdades:

$$\phi_j(u_1, \dots, u_r) \leq 0 \quad j=1, 2, \dots, m \quad (2)$$

As variáveis de controle  $u_j(t)$  devem ser funções do tempo, contínuas, ou pelo menos, contínuas por partes. Isto é, admitem um número finito de descontinuidades no intervalo de tempo determinado para execução da tarefa,  $0, T$ . Todo controle que satisfizer estas duas condições, pertencer a  $U$  e continuidade por partes, é chamado controle admissível.

Nos casos mais simples a função critério poderá ser uma das variáveis de estado <sup>no instante final</sup>. Por exemplo, num sistema de produção deseja-se minimizar o estoque, que é uma das variáveis de estado do sistema. Uma combinação linear das variáveis de estado também pode ser uma função objetivo. Em qualquer desses dois casos a função objetivo poderá ser representada por:

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (3)$$

ou, em forma vetorial:

$$S = c'x$$

onde

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \text{é um vetor constante.}$$

Porém, pode ocorrer que a função critério não seja uma das variáveis de estado ou uma combinação delas. Neste caso mais geral a função <sup>real</sup> critério é representada por

$$S = \int_0^T L(x,u,t)dt \quad (4)$$

onde  $L$  é uma função qualquer,

$$x = (x_1, \dots, x_n)'$$

$$u = (u_1, \dots, u_n)'$$

$t$  é o tempo

Nos casos deste tipo acrescentamos ao sistema mais uma variável de estado

$$x_{n+1}(t) = \int_0^t L(x,u,t)dt \quad (5)$$

ou seja

$$\dot{x}_{n+1} = L(x,u,t)$$

De modo que a função objetivo pode tomar outra vez a forma (3):

$$S = \sum_{i=1}^{n+1} c_i x_i$$

onde  $c_i = 0$  para  $i=1,2,\dots,n$

$$c_{n+1} = 1$$

Daqui para diante sempre apresentaremos a função objetivo como uma combinação linear das  $n$  variáveis de estado

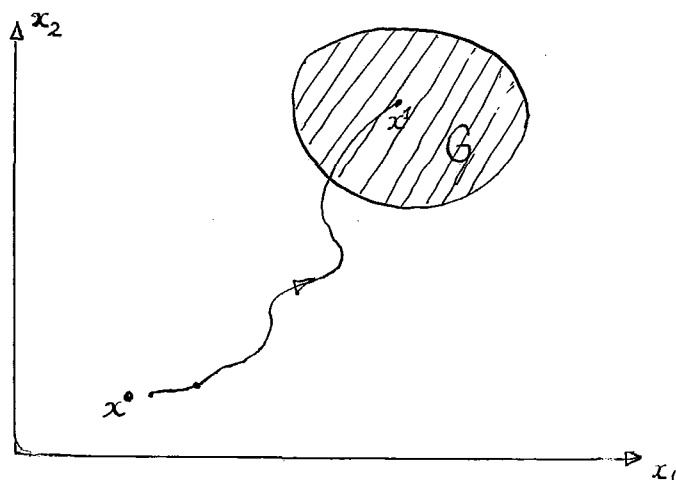
$$S = \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (6)$$

porque no número  $n$  de variáveis está incluída aquela definida pela função objetivo. Também daqui para diante só serão considerados controles admissíveis. As funções  $L$  e  $f_i$  terão sempre derivadas contínuas até a segunda ordem.

Quando falamos do tipo de problema de um sub-sistema dentro de uma estrutura hierarquizada deixamos transparecer que nas tarefas o sub-sistema é transportado de um ponto a outro de seu espaço de estados num período fixo de tempo, ou num período mínimo de tempo. Neste último caso, o prazo para execução da tarefa não é fixo. Queremos falar aqui que existe mais uma situação em que este prazo não é fixo. É aquela em que o tempo gasto no percurso entre o ponto inicial e o ponto final da trajetória não tem a menor importância; é inteiramente livre.

Podem ocorrer casos em que o período de tempo é fixo, mas o ponto final da trajetória não é fixo. Também dois casos podem ocorrer. O primeiro seria aquele em que o ponto final é inteiramente livre, não tendo a menor importância a sua localização. O segundo caso seria aquele em que o ponto final deve estar numa região determinada,  $G$ , do espaço de estados. Esta região estaria definida por uma relação do tipo:

$$F(x_1, \dots, x_n) \leq 0$$



E finalmente pode acontecer o caso em que seja necessário atingir um ponto qualquer da região, com tempo livre. O que é uma combinação de dois dos casos acima.

Muitas vezes a função objetivo representa um custo ou uma quantidade de recursos a ser alocada que, como geralmente ocorre na prática, tem um limite superior. Em termos de função <sup>real</sup> objetivo é:

$$S = \int_0^T L(x,u,t)dt \leq K$$

onde  $K$  é uma constante

Como essa função objetivo se transforma numa variável de estado, temos aí um exemplo onde o ponto final da trajetória deve estar numa região determinada do espaço de estados. Ou seja,  $x_{n+1}(T) \leq K$ .

Agora apresentamos uma tabela dos tipos de problemas que estudaremos neste capítulo. Os tipos de problemas são divididos quanto ao tempo requerido para execução da tarefa, fixo ou livre, e quanto às condições finais do sistema no final da tarefa, condições fixas ou livres.

Caso	Seção	Tempo	Condições Finais
1	2	fixo	livres
2	3	fixo	fixas
3	4	livre	fixas
4	4	mínimo	fixas

O que apresentamos na tabela são alguns tipos de problemas que podem surgir ao se tratar de um sub-sistema dentro de uma estrutura hierarquizada. Nas seções que seguem apresentaremos métodos para sua solução.

Seção - 2 - Realização de uma tarefa com prazo fixo e sem restrições quanto ao valor final das variáveis do sistema.

No caso que estudaremos agora o prazo para execução da tarefa é fixo e sua execução deve ser tal que uma função critério seja otimizada, mas não importam os valores finais alcançados pelas variáveis do sistema. Noutras palavras, trataremos de um problema de controle ótimo com tempo fixo e condições finais livres.

O estudo deste tipo de problema pode ser motivado pela importância que assume quando se pretende conhecer as possibilidades de um sistema. Por exemplo, conhecer a produção de uma linha de montagem que opera de uma maneira ótima durante um intervalo  $[0, T]$ . O conhecimento dessas possibilidades pode ser importante na determinação do padrão de performance de um sistema.

Sendo nos sistemas reais as variáveis de estado limitadas, e no presente caso ilimitadas, uma comparação dos valores assumidos por essas variáveis nos dois casos é sempre interessante no estudo de gargalos de produção ou no estudo de investimentos em bens de produção. Estes estudos são os de sensibilidade.

O problema a ser estudado é apresentado formalmente da seguinte forma:

dado o sistema  $\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t)$  (8)

$i=1, 2, \dots, n$

com condições iniciais dadas  $x_i(0) =$   $i=1, 2, \dots, n$

onde  $x_i$  são as variáveis de estado  
 $u_j$  são as variáveis de controle  
 $t$  é o tempo

encontrar o vetor controle  $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$ ,  $u(t) \in U$ ,  $\forall t \in [0, T]$

tal que minimize a função  $S = \sum_{i=1}^n c_i x_i(T)$  (9)

Na resolução deste problema de controle ótimo lança-se mão de um conjunto de variáveis auxiliares, funções do tempo, que formam um vetor de dimensão  $n$ :

$$p(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{bmatrix}$$

e que ficam definidas por meio do sistema de equações diferenciais:

$$\dot{p}_i(t) = - \sum_{s=1}^n p_s \frac{\partial f_s(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t)}{\partial x_i} \quad (10)$$

$$i=1, 2, \dots, n$$

que tem como condições de contorno:

$$p_i(T) = -kc_i \quad i=1, 2, \dots, n \quad (11)$$

onde  $k$  é uma constante

$c_i$  são os mesmos da equação (9)

O significado das variáveis  $p_i$  ficará claro à medida que avançarmos neste estudo. Da mesma forma se esclarecerão os motivos das condições de contorno  $p_i(T)$ , que têm interessante interpretação geométrica.

Se os controles  $u_j(t)$ ,  $j=1, \dots, r$ , fossem conhecidos, o sistema (8) poderia ser resolvido e conheceríamos cada  $x_i(t)$ . Inserindo estas variáveis  $x_i(t)$  no sistema (10), este seria um sistema de equações diferenciais com coeficientes variáveis, e que poderia ser resolvido encontrando-se uma solução única  $p_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . Por outro lado, o conhecimento de  $p(t)$  é necessário para a determinação do  $u(t)$  que procuramos. Dessa maneira entramos num ciclo vicioso. Então, vamos ver agora como podemos sair dele.

Seja o produto escalar dos vetores  $p(t)$  e  $x(t)$

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) \dot{x}_i(t) \quad (12)$$

onde  $x(t)$  pode ser encarado como uma velocidade e  $p(t)$  como um impulso.

Agora apresentamos a expressão (12) como uma função de  $2n+r+1$  variáveis que é chamada hamiltoniana:

$$H(x,p,u,t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n p_i f_i(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_n; t)$$

E agora as equações (8) e (10) podem ser reescritas na forma:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{com condições iniciais } x_i(0) \quad i=1,2,\dots,n \quad (13)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad \text{com as condições de contorno } p_i(T) = kc_i \quad i=1,2,\dots,n \quad (14)$$

Continuando, seja  $u(t)$  um controle viável e sejam  $x^u(t)$  e  $p^u(t)$  a posição e o "impulso" para o controle  $u(t)$ . Coloquemos os valores  $x_i^u(t)$  e  $p_i^u(t)$  na função  $H(x,p,u,t)$  de modo a termos

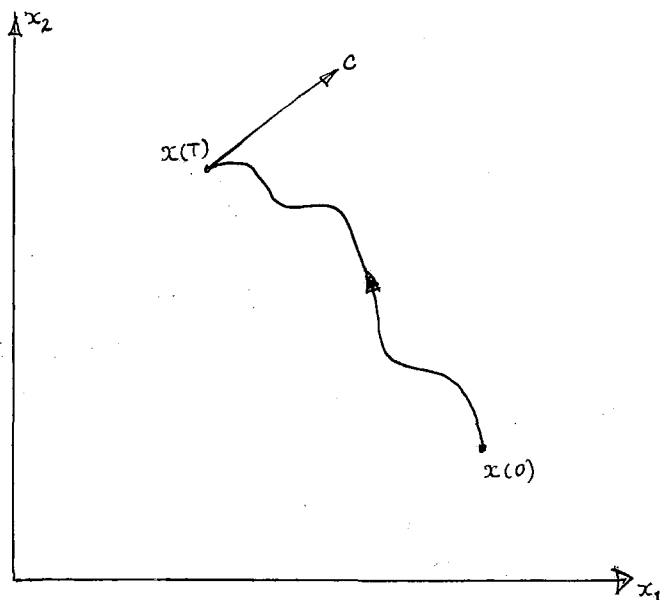
$$K(u,t) = H(x^u(t), p^u(t), u(t), t)$$

que é função de apenas  $r$  variáveis para cada instante  $t$ . O controle  $u(t)$  satisfaz a condição de máximo de Pontryagin se  $K(u,t)$  alcança um máximo para qualquer  $t \in [0, T]$  e para os valores das variáveis correspondentes aos valores do controle no mesmo instante.

Esse é o princípio do máximo de Pontryagin, e nos diz que se o controle  $u(t)$  é tal que  $S = \int_0^T c_i x_i(T)$  é minimizada,

então  $u(t)$  satisfaz a condição de máximo. Noutras palavras a condição de máximo é uma condição necessária para a minimização da função critério. Ou ainda, o controle  $u(t)$  deve ser escolhido de modo que a cada momento a hamiltoniana  $H(x,p,u,t)$  seja maximizada.

A hamiltoniana  $H(x,p,u,t)$  é o produto escalar do vetor  $p(t)$  com o vetor velocidade  $\dot{x}(t)$ . Então, a interpretação geométrica que pode ser dada à condição do máximo é que o controle ótimo tenta movimentar os pontos definidos pelas variáveis de estado com velocidade máxima numa direção determinada. Ou seja, tenta movimentar otimamente os pontos em cada instante. Particularmente no instante final, quando  $p_i(T) = -kc_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , o vetor  $\dot{x}(T)$  tem mesma direção que  $p(T)$ , porém com sentido oposto ao do vetor  $c$ .



Agora apresentaremos um exemplo para ilustrar a aplicação do princípio do máximo. Trata-se de um sistema de produção constituído de dois sub-sistemas onde as variações de produção dependem apenas dos recursos fornecidos a cada um. A produção do sistema gera um lucro que vamos procurar maximizar.



$Q(t)$  representa a taxa de produção

$R(t)$  representa recurso fornecido por unidade de tempo

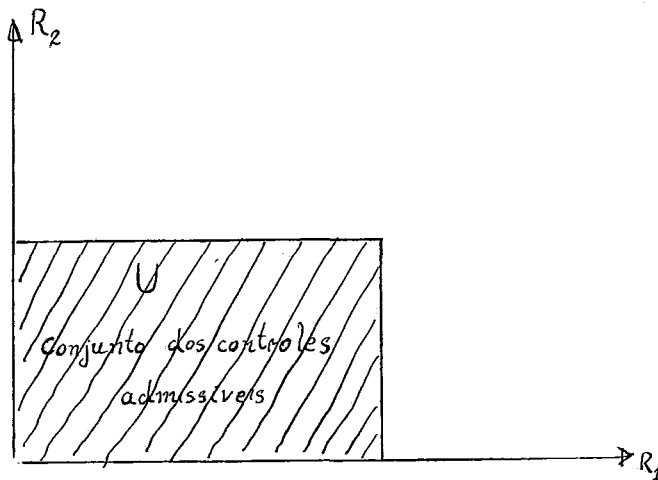
$$\dot{Q}_1(t) = k_1 R_1(t) \quad \text{condição inicial } Q_1(0)$$

$$\dot{Q}_2(t) = k_2 R_2^2(t) \quad \text{condição inicial } Q_2(0)$$

$$R_1(t) \in [0, \bar{R}_1] \quad \bar{R}_1 \text{ é constante}$$

$$R_2(t) \in [0, \bar{R}_2] \quad \bar{R}_2 \text{ é constante}$$

portanto  $U$  é um retângulo:



O lucro do sistema é dado pela equação

$$L = -k_3 R_1(t) + k_4 R_2(t)$$

Aplicar recursos no sub-sistema 2 sempre gera lucro, mas aplicar recursos no sub-sistema 1 gera prejuízo.

Deseja-se maximizar o lucro no intervalo  $[0, T]$ .

ou seja

$$\text{minimizar } I = \int_0^T [k_3 R_1(t) - k_4 R_2(t)] dt$$

Resolução:

$$\text{definimos } \dot{Q}_3(t) = k_3 R_1(t) - k_4 R_2(t)$$

e

$$S = \sum_{i=1}^3 c_i Q_i(T)$$

que será a nova função objetivo a ser minimizada, e onde

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = 0$$

$$c_3 = 1$$

A hamiltoniana será dada por

$$H(Q,p,R,t) = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{Q}_i = p_1 k_1 R_1(t) + p_2 k_2 R_2^2(t) + p_3 k_3 R_1(T) + p_3 k_4 R_2(t)$$

Dai

$$\dot{p}_1(t) = - \frac{\partial H}{\partial Q_1} = 0$$

$$p_1(T) = -c_1 = 0 \quad p_1(t) = 0$$

$$\dot{p}_2(t) = - \frac{\partial H}{\partial Q_2} = 0$$

$$p_2(T) = -c_2 = 0 \quad p_2(t) = 0$$

$$\dot{p}_3(t) = - \frac{\partial H}{\partial Q_3} = 0$$

$$p_3(T) = -c_3 = -1 \quad p_3(t) = -1$$

Voltando à hamiltoniana:

$$H(Q,p,R,t) = k_3 R_1(t) - k_4 R_2(t)$$

Para maximizar esta hamiltoniana em cada  $t \in [0, T]$ ,  $R_1(t)$  tem que assumir sempre o máximo valor, e  $R_2(t)$  deve assumir o seu valor mínimo. Portanto

$$R_1(t) = \bar{R}_1 \quad t \in [0, T]$$

$$R_2(t) = \bar{R}_2 \quad t \in [0, T]$$

No início do problema havíamos dito que qualquer aplicação de recursos  $R_1$  gerava lucros, e qualquer aplicação de recursos  $R_2$  gerava prejuízos. Portanto já era óbvio se esperar uma maximização de aplicação dos recursos  $R_1$ , e uma minimização da aplicação de  $R_2$ . Este exemplo foi muito elementar, mas justificamos sua apresentação porque o nosso intuito era apenas de ilustrar a aplicação do princípio do máximo de Pontryagin.

A maximização da hamiltoniana  $H(x,p,u,t)$  nos permite expressar  $u(t)$  como função de  $x(t)$  e  $p(t)$ , ou seja:

$$u_j(t) = G_j(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n; t) \quad j=1, 2, \dots, n \quad (15)$$

Substituindo as variáveis  $u_j$  pelas expressões (15) em (13) e (14), obtemos um sistema de  $2n$  equações diferenciais com  $2n$  condições de contorno, cuja solução nos dá a trajetória ótima e o "impulso"  $p(t)$  em cada instante. Então, utilizando  $x(t)$  e  $p(t)$ , conhecidos, na equação (15) podemos determinar  $u(t)$ .

Estes controles encontrados satisfazem uma condição necessária para o controle ótimo. Para garantir  $u(t)$  como controle ótimo seria necessário que satisfizesse uma condição de suficiência. Infelizmente, só para poucos casos se conhece essa condição de suficiência. Para o caso em que as restrições são lineares em relação às coordenadas de posição,

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_k + h_i(u_1, \dots, u_r) \quad i=1, 2, \dots, n$$

onde  $h_i$  são funções quaisquer, com derivada de segunda ordem contínuas.

pode ser demonstrado que a condição do máximo de Pontryagin é necessária e suficiente para  $u(t)$  ser controle ótimo. [16]

Vale a pena notar que nos casos em que a condição de máximo não é suficiente, mesmo assim se pode encontrar o controle ótimo na maioria dos casos práticos. Quando a existência de um controle ótimo é sabida de considerações físicas, e o controle que satisfaz a condição de máximo é único, então este controle é ótimo. vide ref. [16]

#### o caso linear

Conforme acabamos de ver, quando as equações que

definem o sistema são lineares em  $x(t)$ , a condição de máximo é suficiente para o controle ser ótimo. Veremos agora como se resolve o caso em que o sistema é definido por funções lineares em relação às variáveis de estado e também em relação às variáveis de controle. A função objetivo, da mesma forma, é linear.

Seja o sistema linear definido por:

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n-1} a_{ik}(t)x_k(t) + \sum_{j=1}^r b_{ij}(t)u_j(t) + h(t) \quad (16)$$

$i=1,2,\dots,n-1$

e deseja-se minimizar a função critério:

$$I = \int_0^T \left[ \sum_{i=1}^{n-1} s_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^r w_j(t)u_j(t) \right] dt \quad (17)$$

#### Resolução:

Introduzimos no sistema uma nova variável definida a partir de (17)

$$\dot{x}_n = \sum_{i=1}^{n-1} s_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^r w_j(t)u_j(t) \quad x_n(0)=0$$

de modo que nosso novo objetivo é minimizar  $x_n(T)$ . E o novo sistema, agora com  $n$  variáveis, pode ser apresentado em forma vetorial:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + D(t)$$

onde  $A(t) : n \times n$

$B(t) : n \times r$

$x(t) : n \times 1$

$u(t) : r \times 1$

$D(t) : n \times 1$

O sistema de equações que define as variáveis auxiliares, poderia ser obtido pelo procedimento normal, a partir

da hamiltoniana. Porém este trabalho pode ser poupado pois o novo sistema será sempre dado pela transposta da matriz  $A(t)$ . Isto pode ser demonstrado sem dificuldade usando as equações (10). Assim,

$$\dot{p} = -A'p \qquad p(T) = -c \qquad (18)$$

onde  $c_i = 0$  para  $i=1,2,\dots,n-1$   
 $c_n = 1$

Como a matriz  $A$  é conhecida, este sistema possui solução bem determinada.

A expressão vetorial da hamiltoniana é dada por:

$$H(x,p,u,t) = p\dot{x} = p'Ax + p'Bu + p'D \qquad (19)$$

onde  $p' = p_1, \dots, p_n$

Um exame da equação (19) mostra que só o termo  $p'Bu$  depende de  $u(t)$ . Portanto, basta maximizar este termo para maximizar toda a equação.

Agora, seja a matriz  $l \times r$

$$q = (q_1, \dots, q_r) = p'B \qquad (20)$$

de modo que temos

$$p'Bu = qu = \sum_{j=1}^r q_j(t)u_j(t) \qquad (21)$$

cuja maximização, que implica na maximização da hamiltoniana, é obtida quando se escolhe cada  $u_j(t)$ ,  $j=1,2,\dots,r$ , da seguinte maneira:

$$u_j(t) = \begin{cases} a) \text{ máximo de } u_j(t) & \text{se } q_j(t) > 0 \\ b) \text{ mínimo de } u_j(t) & \text{se } q_j(t) < 0 \\ c) \text{ não definido se } q_j(t) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} u_j \in U \\ u_j \in U \end{matrix} \qquad (22)$$

Este procedimento leva à maximização da hamiltoniana. Como vimos, o sistema de equações (18) tem solução bem determinada quando  $A(t)$  fôr não singular, o que nos garante a unicidade dos controles dados pelas equações (22), que são então os controles ótimos.

Pode-se ver que os controles ótimos podem ser obtidos conhecendo-se apenas as matrizes  $A(t)$  e  $B(t)$  e as condições de contorno das variáveis auxiliares. Quer dizer, não é preciso expressar  $u$  em termos de  $x$  e  $p$ , substituir nas equações de estado, resolvê-las e tornar a determinar  $u$  em função de  $x$  e de  $p$ , cujos valores já foram encontrados. Existe aqui uma enorme simplificação computacional. Também se pode ver da equação (22) que no caso de sistemas lineares o controle estará sempre na fronteira da região de controles admissíveis,  $U$ . O que nos permite concluir que os controles utilizados são sempre do tipo "full-control" ou bang-bang.

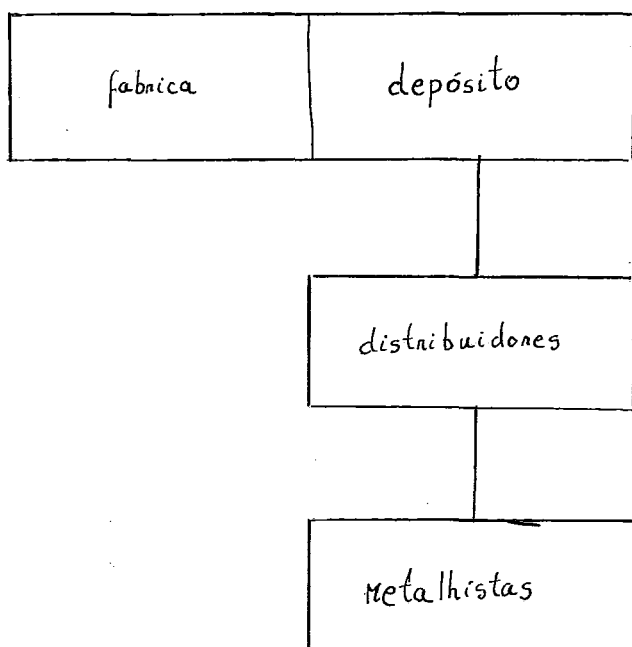
É interessante notar aqui o paralelismo entre o controle ótimo na fronteira da região de controles admissíveis e, no caso estático, o ponto de ótimo na fronteira da região viável em programação linear.

Quando ocorre o caso c) das expressões (22), o controle não fica definido pela maximização da hamiltoniana. Felizmente, no caso linear, o controle fica indefinido apenas num ponto (na maioria dos casos). Quando essa indefinição não ocorre em apenas um ponto, o controle a ser encontrado chama-se controle singular. Não existe um procedimento formalizado para se encontrar um controle singular, mas não é sempre impossível fazê-lo.[16]

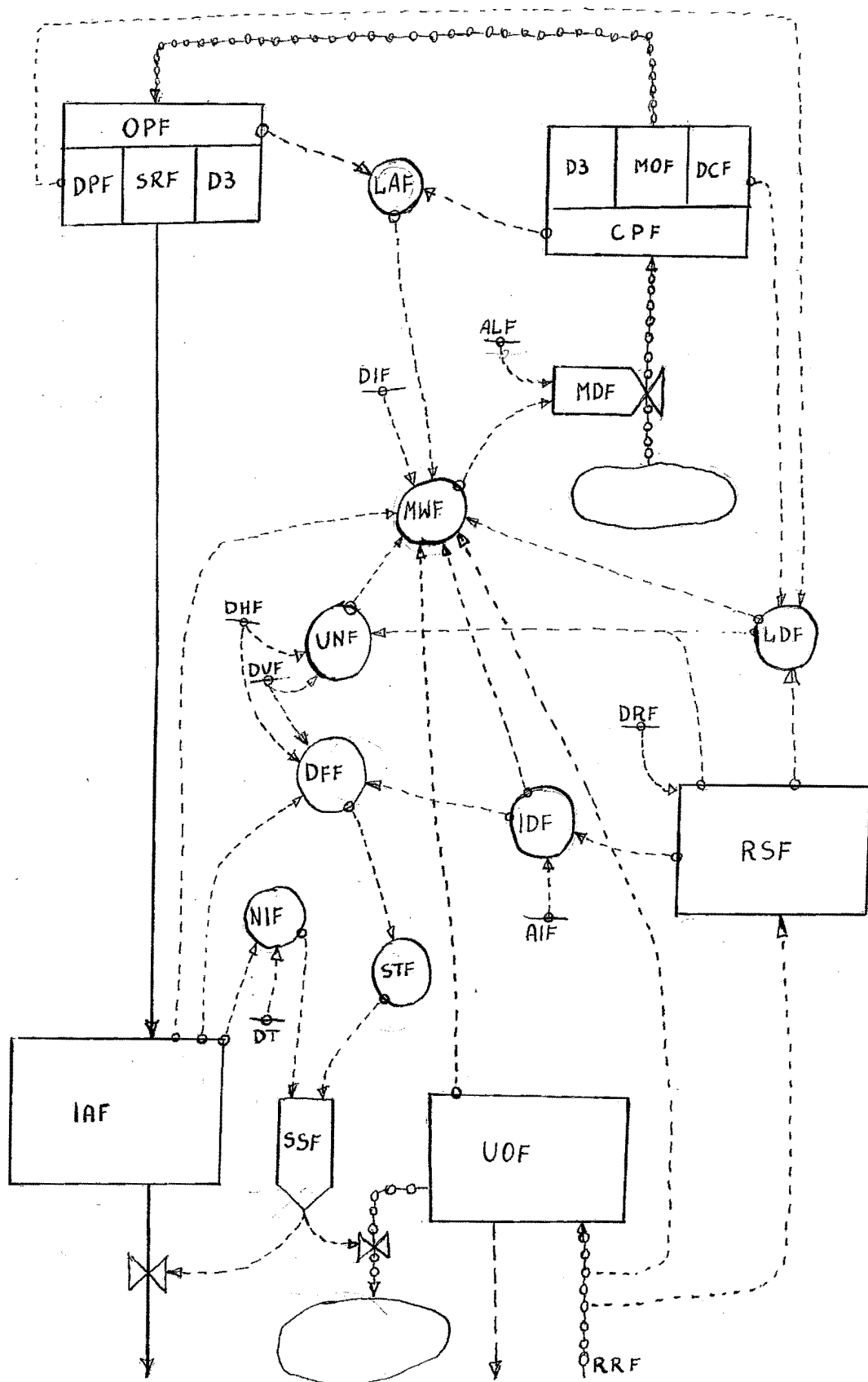
Veremos agora um exemplo para ilustrar a aplicação do que foi até aqui apresentado. Trata-se da aplicação de controle ótimo a um modelo de sistema produção-distribuição construído para estudo com utilização dos métodos de Dinâmica Industrial. Este estudo pode ser encontrado na referên-

cia[8] . O exemplo que apresentamos é uma pequena parte do sistema, a parte da produção.

O sistema produção-distribuição de uma companhia é constituído de uma fábrica com um depósito anexo, um conjunto de distribuidores atacadistas e, finalmente, um conjunto de retalhistas que vendem o produto ao consumidor.



Em nosso exemplo trataremos apenas da parte da fábrica com seu depósito, com modelo muito simplificado. A fábrica e seu depósito, na referência acima citada tem um diagrama típico de Dinâmica Industrial para representá-lo. Este diagrama está na página seguinte:





onde

- AIF : constante de proporcionalidade para cálculo do nível desejado de estoque (semanas).
- ALF : constante que especifica o limite da taxa de produção (unidades/semana).
- CPF : ordens de produção já expedidas pelo escritório, mas ainda não produzidas (unidades).
- DCF : constante de tempo do processamento dos pedidos no escritório (semanas).
- DFE : constante de tempo (variável) para atendimento dos pedidos à fábrica (semanas).
- DHF : constante de tempo mínima para atendimento dos pedidos à fábrica (semanas).
- DIF : constante de tempo para computação do nível de estoque (semanas).
- DPF : constante de tempo para execução de uma ordem de produção (semanas).
- DRF : constante de tempo para a computação da média de pedidos (semanas).
- DT : intervalo de tempo (semanas)
- DUF : constante de tempo média para atendimento de pedidos quando existe falta do produto no depósito (semanas).
- IAF : nível do estoque no depósito (unidades).
- IBF : nível desejado do estoque no depósito (unidades).
- LAF : Nível real de ordens de fabricação em trânsito (unidades)
- LDF : nível desejado de ordens de fabricação em trânsito (unidades).
- MDF : Taxa de produção decidida (unidades/semana).
- MOF : fluxo de ordens de fabricação para o setor de produção (unidades/semana)
- MWF : taxa de produção desejada (unidades por semana).
- NIF : limite da diferença saída-entrada no depósito (unidades/semana).

OPF : ordens de produção sendo executadas (unidades).  
 RRF : fluxo de pedidos que a fábrica recebe (unidades por semana).  
 RSF : média de pedidos semanais (unidades/semana).  
 SRF : fluxo de entrada de unidades fabricadas no depósito (unidades/semana).  
 SSF : fluxo de atendimento dos pedidos (unidades/semana).  
 STF : fluxo ideal de entrada dos produtos fabricados no depósito (unidades/semana).  
 UNF : nível normal de pedidos não atendidos (unidades).  
 UOF : nível real de pedidos não atendidos (unidades).

Todos esses parâmetros e variáveis estão relacionados entre si de uma forma dinâmica. O tempo neste caso de Dinâmica Industrial é discretizado. Nas relações dadas a seguir, J, K, L são instantes de tempo e JK, KL são intervalos de tempo entre os instantes J e K, e K e L, respectivamente.

$$UOF(K) = UOF(J) + (DT)(RRF(JK) - SSF(JK))$$

$$IAF(K) = IAF(J) + (DT)(SRF(JK) - SSF(JK))$$

$$STF(K) = \frac{UOF(K)}{DFF(K)}$$

$$NIF(K) = \frac{IAF(K)}{DT}$$

$$STF(K) \text{ se } NIF(K) \quad STF(K)$$

$$SSF(KL) = \frac{STF(K)}{NIF(K) \text{ se } NIF(K)} \quad STF(K)$$

$$DFF(K) = DHF + DUF - \frac{IDF(K)}{IAF(K)}$$

$$IDF(K) = (AIF)(RSF(K))$$

$$RSF(K) = RSF(J) + (DT)\left(\frac{1}{DRF}\right)(RRF(JK) - RSF(J))$$

$$MWF(K) = RRF(JK) + \left(\frac{1}{DIF}\right)((IDF(K) - IAF(K)) + (LDF(K) - LAF(K)) + (UOF(K) - UNF(K)))$$

$$MDF(KL) = \begin{cases} MWF(K) & \text{se } ALF < MWF(K) \\ ALF & \text{se } ALF \geq MWF(K) \end{cases}$$

$$LDF(K) = (RSF(K))(DCF+DPF)$$

$$LAF(K) = CPF(K) + OPF(K)$$

$$UNF(K) = (RSF(K))(DHF + DUF)$$

$$CPF(K) = CPF(J) + (DT)(MDF(JK)-MOF(JK))$$

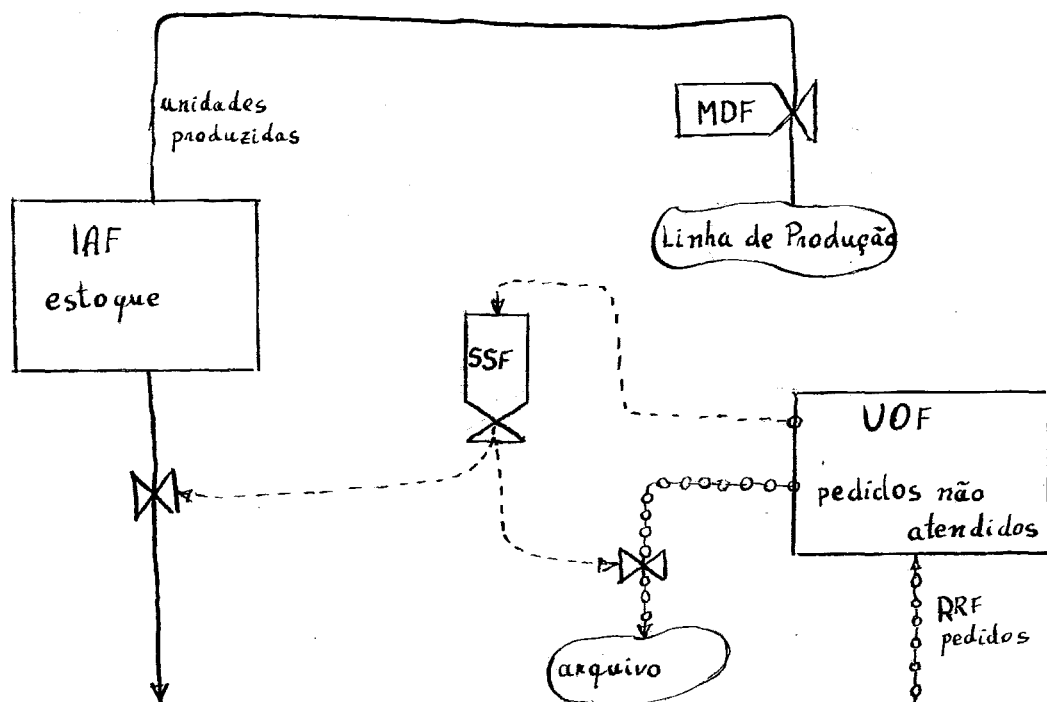
$$MOF(KL) = DELAY3(MDF(JK),DCF)$$

$$OPF(K) = OPF(J) + (DT)(MOF(JK)-SRF(JK))$$

$$SRF(KL) = DELAY3(MOF(JK),DPF)$$

Este é um modelo bem realista da parte da fábrica do sistema produção distribuição. Usando este modelo o sistema é simulado em computador digital. Um estudo muito interessante dessas simulações pode ser visto na referência já citada.

Nosso objetivo é ilustrar a aplicação de controle ótimo a sistemas de produção, para isso utilizaremos um modelo muito simplificado obtido a partir desse de Dinâmica Industrial.



As simplificações principais introduzidas são:

- a eliminação de atrasos de tempo entre a decisão de variar a produção, MDF, e a variação do fluxo de entrada de produtos no depósito;
- a decisão de variar o fluxo de atendimento dos pedidos agora depende apenas do nível de pedidos não atendidos, porque eliminamos todas as equações intermediárias.

No entanto, a alteração fundamental no modelo está na maneira de controlar o fluxo de produção, MDF. No modelo original, MDF dependia direta ou indiretamente de vários níveis, fluxos e parâmetros do sistema. No modelo simplificado MDF não depende de nada disso, podemos atribuir-lhe qualquer valor ou comportamento, ou então ligá-lo da maneira que quisermos às variáveis que acharmos conveniente. Vamos aproveitar a liberdade de podermos usar MDF à nossa vontade para controlar a produção de tal maneira que seja minimizado o custo de operação do sistema.

O custo de operação do sistema é dado pela seguinte equação integral:

$$Z(t) = C_I \int_0^t IAF(t) dt + C_P \int_0^t MDF(t) dt + C_S \int_0^t [RRF(t) - MDF(t)] dt$$

Esta equação será a função critério do problema de controle ótimo. Um pouco acima dissemos que poderíamos ligar MDF da maneira que quiséssemos às variáveis convenientes. Foi o que fizemos. Através dessa última equação ligamos as decisões sobre a taxa de fabricação ao preço de manter estoque, ao preço de produzir e ao preço de deixar de atender demanda.

Em tempo,  $C_I$  é o preço, ou custo, de manter uma unidade produzida em estoque.  $C_P$  é o custo de produção de uma unidade.  $C_S$  é o custo de não atender a demanda de uma unidade.

Antes de continuar vamos apresentar melhor o sistema

simplificado.

O nível de estoque  $IAF(t)$  está ligado ao fluxo de entrada,  $MDF(t)$ , e ao fluxo de saída,  $SSF(t)$ , por meio da relação:

$$\dot{IAF}(t) = IAF(0) + \int_0^t [MDF(t) - SSF(t)] dt$$

ou, em forma de equação diferencial,

$$\dot{IAF}(t) = MDF(t) - SSF(t)$$

com a condição inicial  $IAF(0)$ .

O nível de pedidos não atendidos  $UOF(t)$  está ligado ao fluxo de entrada de pedidos,  $RRF(t)$ , e ao fluxo de atendimento dos pedidos,  $SSF(t)$ , por meio da relação:

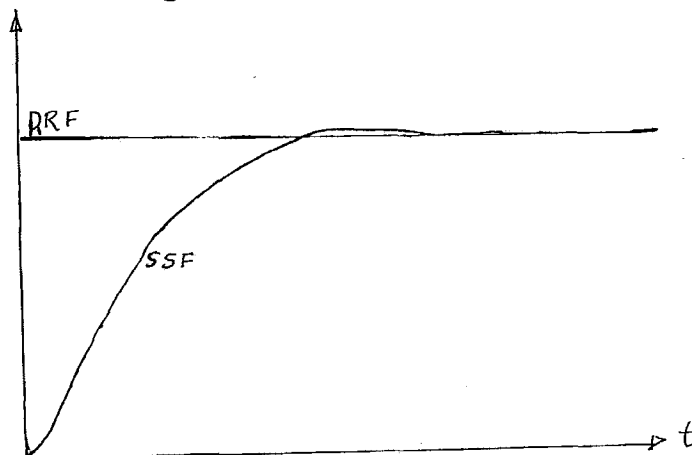
$$UOF(t) = UOF(0) + \int_0^t [RRF(t) - SSF(t)] dt$$

ou, em forma de equação diferencial:

$$\dot{UOF}(t) = RRF(t) - SSF(t)$$

com a condição inicial  $UOF(0)$ .

Na simulação do sistema original verificou-se um comportamento de  $SSF(t)$  para uma variação degrau de  $RRF(t)$  como o mostrado na figura:



Como se pode ver, pode ser considerado que  $SSF(t)$  comporta-se como um sistema de segunda ordem em relação a  $RRF(t)$ . Como existe apenas um "overshoot" e ele é muito pequeno, não chega ser irrazoável que no modelo simplificado se considere que  $SSF(t)$  comporte-se como um sistema de primeira ordem em relação a  $UOF(t)$ . Suposto isso, a relação que liga essas duas variáveis será:

$$SSF(t) = SSF(0) + k_1 \int_0^t UOF(t-\tau) e^{-\frac{\tau}{\alpha}} d\tau$$

Usando transformada de Laplace obtemos a seguinte expressão:

$$SSF(s) = UOF(s) \frac{k}{1 + \alpha s}$$

$$\alpha s SSF(s) + SSF(s) = k UOF(s)$$

$$s SSF(s) = \frac{k}{\alpha} UOF(s) - \frac{1}{\alpha} SSF(t)$$

e voltando ao domínio do tempo:

$$\dot{SSF}(t) = \frac{k}{\alpha} UOF(t) - \frac{1}{\alpha} SSF(t)$$

com condição inicial  $SSF(0)$

Agora já podemos enunciar o nosso problema de controle ótimo:

Encontrar uma programação da produção  $MDF(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , tal que minimize

$$Z(T) = C_I \int_0^T IAF(t) dt + C_P \int_0^T MDF(t) dt + C_S \int_0^T [RRF(t) - MDF(t)] dt$$

sujeito a:

$$\dot{I}AF(t) = MDF(t) - SSF(t)$$

$$\dot{S}SF(t) = \frac{k}{\alpha} UOF(t) - \frac{1}{\alpha} SSF(t)$$

$$\dot{U}OF(t) = RRF(t) - SSF(t)$$

com as condições iniciais

$$\begin{array}{l} SSF(0) \\ IAF(0) \\ UOF(0) \end{array}$$

Para resolver este problema iniciamos por fazer

$$Z(t) = C_I IAF(t) + C_P MDF(t) + C_S RRF(t) - MDF(t)$$

A  $MDF(t)$  é imposta uma restrição, limites máximo e mínimo de produção,  $\overline{MDF}$  e  $\underline{MDF}$ , respectivamente.

Na forma vetorial o problema toma a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}AF \\ \dot{S}SF \\ \dot{U}OF \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & \frac{k}{\alpha} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ C_I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} IAF \\ SSF \\ UOF \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ C_P - C_S & C_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} MDF \\ RRF \end{bmatrix}$$

O vetor da equação  $S=c'x$  a ser minimizada é dado neste problema por

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

porque queremos minimizar apenas uma das variáveis de estado,  $Z$ .

As matrizes  $A$  e  $B$  são:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & \frac{k}{\alpha} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ C_I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ C_P - C_S & C_S \end{bmatrix}$$

O sistema auxiliar será dado por:

$$\dot{p} = -A'p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -C_I \\ 1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

com a condição de contorno  $p(T) = -c$

$$\begin{bmatrix} p_1(T) \\ p_2(T) \\ p_3(T) \\ p_4(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A solução deste sistema  $\dot{p} = -A'p$  será uma combinação linear de termos do tipo  $e^{\lambda t} V_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , onde  $V_i$  é um autovetor de  $A'$  e  $\lambda_i$  é o respectivo autovalor.

Vamos agora encontrar os autovalores e autovetores de  $A'$

$$\det [-A' - I] = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & C_I \\ 1 & \frac{1}{\alpha} - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{\alpha} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= -\lambda \left( \lambda \left( \frac{1}{\alpha} - \lambda \right) - \frac{k}{\alpha} \right) = \lambda^2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\alpha} \lambda + \frac{k}{\alpha} \right) = 0$$

$$= \frac{\frac{1}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha} - \frac{4k}{\alpha}}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4k\alpha}}{2\alpha}$$

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4k\alpha}}{2\alpha}$$

$$\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4k\alpha}}{2\alpha}$$

Supomos  $1 < 4k\alpha$



$$\lambda_3 = 0$$

$$\lambda_4 = 0$$

Os auto vetores  $V_1$  e  $V_2$  terão a forma

$$V_i = \begin{bmatrix} a_i e^{\lambda_i t} \\ b_i e^{\lambda_i t} \\ c_i e^{\lambda_i t} \\ d_i e^{\lambda_i t} \end{bmatrix} \quad i=1,2,\dots$$

No caso dos autovalores repetidos  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$ , os auto vetores correspondentes serão dados por

$$V_3 = \begin{bmatrix} a_3 e^{0t} \\ b_3 e^{0t} \\ c_3 e^{0t} \\ d_3 e^{0t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad V_4 = \begin{bmatrix} (a_4 + b_4 t) e^{\lambda_4 t} \\ (c_4 + d_4 t) e^{\lambda_4 t} \\ (e_4 + f_4 t) e^{\lambda_4 t} \\ (g_4 + h_4 t) e^{\lambda_4 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_4 + b_4 t \\ c_4 + d_4 t \\ e_4 + f_4 t \\ g_4 + h_4 t \end{bmatrix}$$

As constantes  $a_i, b_i, c_i, d_i, i=1,2,3,4$ ; e  $e_i, f_i, g_i, h_i, i=3,4$  são obtidas por meio da equação:

$$(-A' - \lambda_i I) V_i = 0 \quad \text{quando } \lambda_i \neq \lambda_{i-1} \quad (23)$$

ou  $(-A' - \lambda_i I) V_i = V_{i-1} \quad \text{quando } \lambda_i = \lambda_{i-1}$

Neste exemplo vamos supor que  $k > \frac{1}{4}$ , o que faz com que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sejam complexos conjugados. Toda vez que isto acontece calcula-se o autovetor correspondente a um deles e ignora-se o outro. O autovetor complexo é desdobrado em dois, um constituído da parte real e outro constituído da parte imaginária.

Portanto, vamos escolher  $\lambda_1 = \frac{1+i\sqrt{4k-1}}{2}$  para gerar dois autovetores. Substituindo o  $V_1$  na equação (23) obtemos:

$$(-A' - \lambda_1 I)V_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 a_1 - c_1 d_1 \\ a_1 - (\lambda_1 - \frac{1}{\alpha})b_1 + c_1 \\ -\frac{k}{\alpha}b_1 - \lambda_1 c_1 \\ -\lambda_1 d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que nos leva a ter

$$d_1 = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$b_1 = -\frac{\alpha}{k} c_1$$

$$b_1 = -\frac{1 + i\sqrt{4k\alpha - 1}}{2k} c_1$$

$$c_1 = -1$$

$$b_1 = \frac{1 + i\sqrt{4k\alpha - 1}}{2k}$$

Desse modo é obtido  $V$ , de onde tiraremos  $V_1$  e  $V_2$

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1 + i\sqrt{4k\alpha - 1}}{2} e^{\frac{1 + i\sqrt{4k\alpha - 1}}{2\alpha} t} \\ e^{\frac{1 + i\sqrt{4k\alpha - 1}}{2\alpha} t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Neste ponto usamos a relação  $e^{(a+ib)t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$ , e então  $V$  pode ser escrito na forma seguinte:

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} e^{t/2\alpha} (\cos Wt - \sqrt{4k\alpha - 1} \sin Wt) + i(\sin Wt + \sqrt{4k\alpha - 1} \cos Wt) \\ -e^{t/2\alpha} (\cos Wt + i \sin Wt) \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde  $W = \frac{\sqrt{4k\alpha - 1}}{2\alpha}$

De  $V$  podemos tirar então os dois autovetores  $V_1$  e  $V_2$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}e^{t/2\alpha}(\cos Wt - \sqrt{4k\alpha-1} \sin Wt) \\ -e^{t/2\alpha} \cos Wt \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}e^{t/2\alpha}(\sin Wt + \sqrt{4k\alpha-1} \cos Wt) \\ -e^{t/2\alpha} \sin Wt \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para  $\lambda_3=0$  o procedimento é normal, e usando (24) encontramos:

$$V_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e para  $V_4$ :

$$\begin{bmatrix} \lambda_4(a_4+b_4t) = C_I(g_4+h_4t) \\ (a_4+b_4t) - (\lambda_4 - \frac{1}{\alpha})(c_4+d_4t) + e_4 + f_4t \\ -\frac{k}{\alpha}(c_4+d_4t) - \lambda_4(e_4+f_4t) \\ -\lambda_4(g_4+h_4t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = V_3$$

$$g_4+h_4t = -\frac{1}{C_I} \quad \dots \quad g_4 = -\frac{1}{C_I} \quad e \quad h_4=0$$

$$c_4+d_4t = \frac{\alpha}{k} \quad \dots \quad c_4 = \frac{\alpha}{k} \quad e \quad d_4=0$$

$$1+a_4+b_4t = -(e_4+f_4t) \quad \dots \quad a_4 = -e_4-1 \quad e \quad b_4 = -f_4$$

fazendo  $a_4=1$  e  $b_4=1$ , vamos obter:

$$V_4 = \begin{bmatrix} 1-t \\ \frac{\alpha}{k} \\ -2+t \\ \frac{1}{C_I} \end{bmatrix}$$

A matriz fundamental para a resolução do sistema auxiliar (18)  $\dot{p} = A'p$  é dada por

$$\Phi = (V_1, V_2, V_3, V_4)$$

e a solução de (18) é

$$p = \Phi K$$

onde  $K$  é um vetor constante que fica determinado a partir das condições de contorno do sistema (18).

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

então

$$p = \Phi K = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 + (1-t)k_4 \\ \frac{1}{2}e^{t/2\alpha}(\cos Wt - \sqrt{4k\alpha - 1} \sin Wt)k_1 + \frac{1}{2}e^{t/2\alpha}(\sin Wt + \sqrt{4k\alpha - 1} \cos Wt)k_2 + k_4 \frac{\alpha}{k} \\ -e^{t/2\alpha}k_1 \cos Wt - e^{t/2\alpha}k_2 \sin Wt - k_3 + k_4 t - 2k_4 \\ \frac{1}{C_I}k_4 \end{bmatrix}$$

Das condições de contorno de (18):

$$p_4(T) = -1 = \frac{1}{C_I}k_4 \quad \dots \quad k_4 = -C_I \quad \dots \quad p_4(t) = -1$$

$$p_1(T) = 0 = k_3 + (1-T)k_4 = k_3 - (1-T)C_I \quad \dots \quad k_3 = (1-T)C_I$$

$$\dots \quad p_1(t) = (t-T)C_I$$

Como veremos daqui a pouco, no presente caso só temos necessidade de conhecer  $p_1(t)$  e  $p_4(t)$ . Os valores de  $p_2(t)$  e  $p_3(t)$ , ou melhor, suas expressões, se necessário, podem ser determinadas sem maiores dificuldades.

Agora vamos voltar nossa atenção para a hamiltoniana.

$$H(x,p,u,t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{x}_i$$

que neste exemplo toma a forma:

$$H(\text{IAF}, \text{SSF}, \text{UOF}, \text{Z}; p; \text{MDF}; t) = p_1 \dot{\text{IAF}} + p_2 \dot{\text{SSF}} + p_3 \dot{\text{UOF}} + p_4 \dot{\text{Z}}$$

Essa hamiltoniana deve ser maximizada em relação a MDF. Portanto só nos interessam os termos que contêm MDF, e que no caso são  $p_1 \dot{\text{IAF}}$  e  $p_4 \dot{\text{Z}}$ . Noutras palavras, precisamos maximizar

$$H^* = p_1 \dot{\text{IAF}} + p_4 \dot{\text{Z}}$$

Neste ponto já está claro o motivo que nos levou a calcular somente  $p_1(t)$  e  $p_4(t)$  em (25).

Continuando

$$H^* = p_1(t) [\text{MDF}(t) - \text{SSF}(t)] + p_4(t) [C_I \text{IAF}(t) + (C_P - C_S) \text{MDF}(t) + C_S \text{RRF}(t)]$$

$$H^* = C_I(t-T) [\text{MDF}(t) - \text{SSF}(t)] - [C_I \text{IAF}(t) + C_S \text{RRF}(t) + (C_P - C_S) \text{MDF}(t)]$$

$$H^* = [C_I(t-T) + C_S - C_P] \text{MDF}(t) - (t-T) C_I \text{SSF}(t) - C_I \text{IAF}(t) - C_S \text{RRF}(t)$$

$$\text{Façamos } G(t) = C_I(t-T) + C_S - C_P$$

$$\text{e } J(t) = (t-T) C_I \text{SSF}(t) + C_I \text{IAF}(t) + C_S \text{RRF}(t)$$

então,

$$H^* = G(t)MDF(t) - J(t)$$

Esta expressão será maximizada quando:

$$MDF(t) = \begin{cases} \overline{MDF} & \text{se } G(t) > 0 \\ \underline{MDF} & \text{se } G(t) < 0 \\ \text{indefinido} & \text{se } G(t) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Como  $G(t)$  é linear, pode-se perceber que só assumirá o valor zero num único ponto, e portanto, não existe aí a possibilidade de um controle singular.

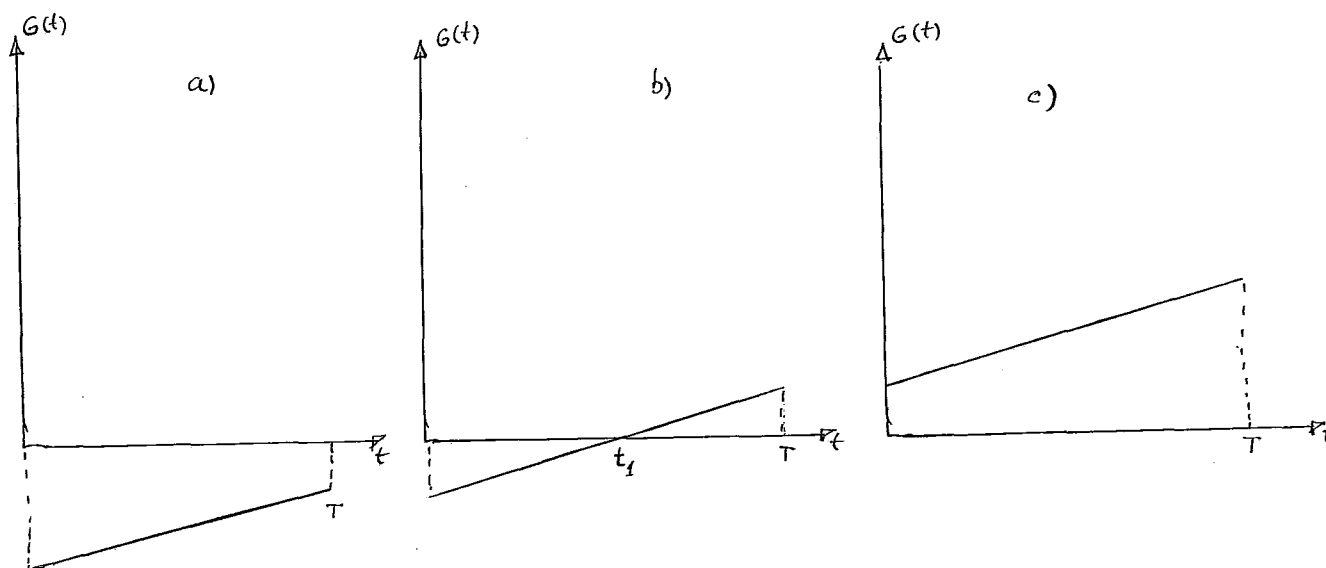
Vamos examinar com mais cuidado a expressão:

$$H^{**} = G(t)MDF(t)$$

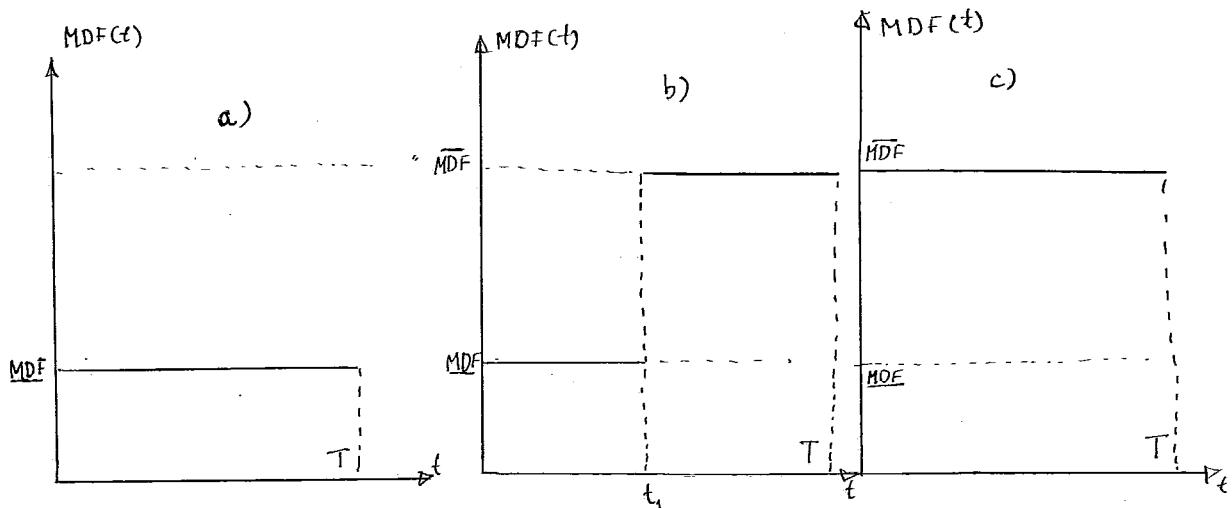
$H^{**}$  deve ser maximizada em cada instante  $t \in [0, T]$ .

$$G(t) = C_I(t-T) + C_S - C_P$$

$G(t)$  é uma função linear do tempo e tem derivada positiva. Pode-se perceber então que  $G(t)$  tem uma das formas da figura abaixo.



E conseqüentemente, conforme (26),  $MDF(t)$  terá uma das formas seguintes:



A ocorrência dos casos a, b, ou c depende dos valores dos parâmetros  $C_I$ ,  $C_s$ ,  $C_p$  e  $T$ . A inclinação da reta depende do custo de estoque. Não é difícil interpretar a inclinação positiva da curva  $G(t)$ , que no caso b, por exemplo, faz com que haja uma troca da taxa de produção de  $MDF$  para  $\overline{MDF}$ . A produção desejada para o intervalo  $[0, T]$  está entre os valores  $MDF.T$  e  $\overline{MDF}.T$ . Então é necessário que durante certo tempo se produza a uma taxa  $\overline{MDF}$  e no restante do tempo a uma taxa  $MDF$ . Se no período inicial produzíssemos  $\overline{MDF}$ , boa parte dessa produção iria para o estoque, o que implicaria em custos de armazenamento. No caso contrário, quando no período inicial se produz à taxa  $MDF$ , não existe tanta produção para ser estocada, e conseqüentemente diminui o custo de estoque. É preciso ficar bem claro que estamos falando do estoque de produtos acabados e não de estoque de material necessário à produção. Nesse último caso o resultado já seria um pouco diferente, pois as despesas com armazenamento de material necessário à produção levaria a uma maior taxa de produção no período inicial.

Quando o custo de produção,  $C_p$ , é muito grande em

relação aos demais é de se esperar que ocorra o caso a), isto é, que se produza o mínimo possível.

Quando o custo de não atender à demanda é relativamente grande, é de se esperar que a produção seja grande para diminuir o risco de não atendimento de pedidos. Assim, poderá ocorrer o caso c).

### Seção 3 - Realização de uma tarefa com prazo fixo e com restrições quanto ao valor final das variáveis do sistema.

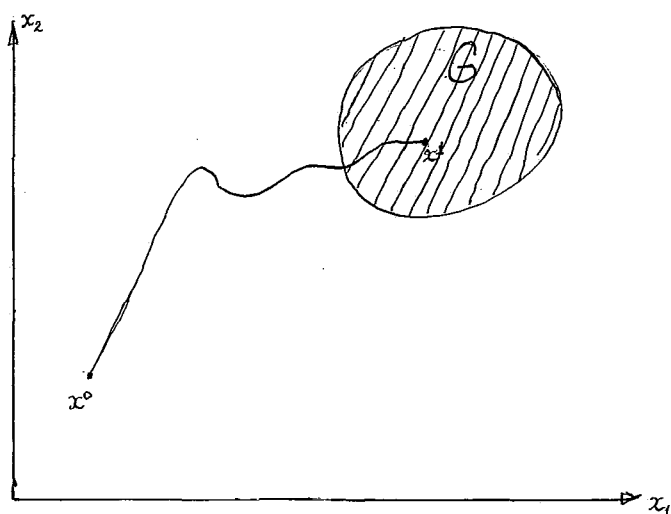
Em sistemas hierarquizados os períodos de realização de tarefas e os períodos necessários a tomadas de decisões são menores nos níveis inferiores. A realização de uma tarefa por parte de um sub-sistema de um nível superior implica na realização de várias tarefas por parte de um sub-sistema de um nível inferior. Cada uma dessas tarefas que um sub-sistema de um nível inferior tem que realizar em geral é do tipo: alcançar um objetivo durante um tempo bem determinado, sempre otimizando uma performance. É desses problemas que trataremos agora. Em termos de controle, trataremos de problemas de controle ótimo com tempo fixo e com condições finais fixas.

Seja  $G$  um conjunto fechado e convexo de pontos do espaço de estados de um sistema, tal que o interior desse conjunto,  $\dot{G}$ , seja não vazio. Exemplos de conjuntos com interior vazio são um ponto ou uma linha no espaço de duas dimensões. Um plano é um conjunto com interior vazio no espaço de três dimensões.

Nosso problema agora é transferir o sistema do estado  $x^0$  para o estado  $x^1$ ,  $x^1 \in G$ . No problema com condições finais livres o conjunto  $G$  era todo o espaço. Agora esse conjunto está mais restrito. Essa é a diferença entre o problema anterior e o atual. Dessas considerações já se pode perceber que a condição do máximo de Pontryagin deve continuar



sendo necessária para o controle ser ótimo. O conjunto dos possíveis pontos finais da trajetória das variáveis no espaço de estados é que está mais restrito. E isto, por sua vez, restringe ainda mais o conjunto de controles capazes de serem ótimos fornecidos pela condição do máximo.



Vimos também no problema anterior, com condições finais livres, que o sistema

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial x_i} \quad i=1,2,\dots,n$$

ficava definido por meio das condições finais

$$\begin{aligned} p_i(T) &= 0 & i=1,2,\dots,n-1 \\ p_n(T) &= -c_n \end{aligned}$$

Neste ponto adiantamos que a condição que restringe ainda mais o conjunto de controles capazes de serem ótimos, restrição devida às condições finais do problema de controle, será dada pelas condições de contorno desse sistema auxiliar. Portanto, devemos procurar a relação entre as condições de contorno e as condições finais do problema de controle.

Antes de estabelecer essa relação vamos esclarecer mais alguns pontos.

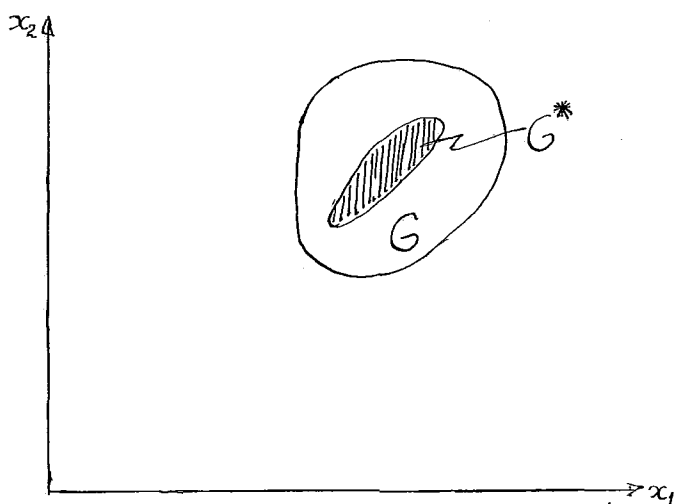
Consideremos a funcional a ser minimizada:

$$S = \sum_{i=1}^n c_i x_i(T)$$

definida no conjunto  $G$ , isto é,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$ . Seja  $G^*$  o sub-conjunto dos pontos,  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ , de  $G$  onde  $S$  atinge o valor mínimo. Então

$$S^* = \sum_{i=1}^n c_i x_i^* \leq \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

onde  $x^*$  é um ponto qualquer de  $G^*$   
 $x$  é um ponto qualquer de  $G$



Um controle capaz de levar o sistema a um estado  $x^* \in G^*$ , dentro do intervalo  $[0, T]$ , é ótimo porque minimiza a funcional  $S$ . Mas neste caso o problema é degenerado. Se o intervalo  $[0, T]$  é tal que o sistema passa de uma maneira ótima a um estado  $x \in G$ , e se ainda é possível, dentro deste mesmo intervalo, passar a um estado  $x^* \in G^*$ , então o problema se chama degenerado. Nos problemas degenerados pode-se trocar a região  $G$  pela região  $G^*$  sem afetar o resultado final do problema. Noutras palavras, existe tempo suficiente para  $x$  atingir  $G$  e ainda sobra tempo para minimizar  $S$  dentro de  $G$ . Na prática para verificar se um

ca, para verificar se um problema é degenerado ou não, compara-se o tempo  $T$  com o tempo mínimo necessário para transferir o sistema do ponto inicial a um ponto  $x^* \in G^*$ . Se este tempo mínimo é maior do que  $T$ , certamente o problema não é degenerado.

Pode-se garantir [16] que num problema não degenerado, se um controle  $u(t)$  é ótimo com respeito a  $S=dx(T)$ , então existe uma função vetorial  $p^u(t)$  tal que  $u(t)$  satisfaz a condição de máximo com respeito a  $p^u(t)$ .

$p_i^u(t)$  é o valor que assume a variável auxiliar  $p_i(t)$  no instante  $t$ , quando se aplica o controle  $u(t)$ .

No caso anterior, condições finais livres, o vetor  $p^u(t)$  estava sujeito à condição de contorno  $p^u(T) = -c$ . Precisamos formular agora uma condição análoga para  $p^u(T)$  no caso do problema com condições finais fixas. É o que vamos fazer agora.

Seja  $x^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$  o ponto final de uma trajetória ótima. A parte de  $G$  para a qual

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i \leq \sum_{i=1}^n c_i x_i^1$$

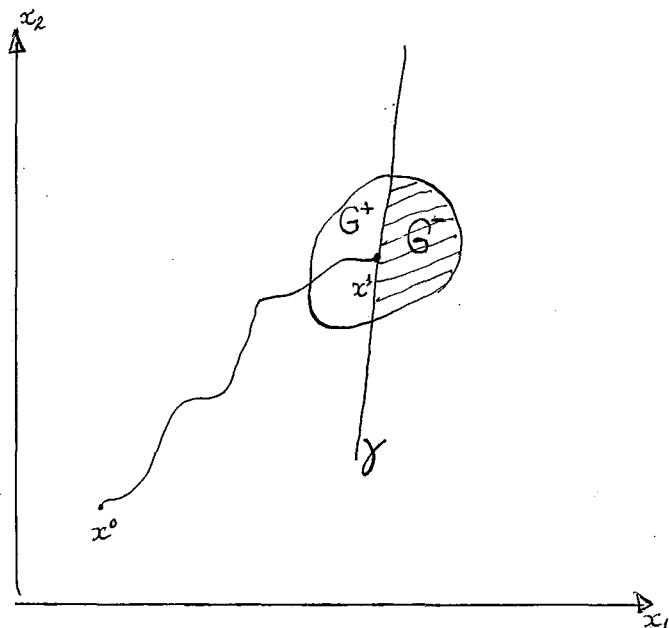
denotaremos por  $G^-$ ; e a parte de  $G$  para a qual

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i \geq \sum_{i=1}^n c_i x_i^1$$

denotaremos por  $G^+$ .  $G^+$  e  $G^-$  são então convexos e fechados. E existe um hiperplano  $\gamma$  definido por

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i (x_i - x_i^1) = 0$$

que é fronteira comum de  $G^-$  e  $G^+$ . O ponto  $x^1$  que tanto pertence a  $G^+$  como a  $G^-$ , pertence também a este hiperplano.



Se um controle  $u(t)$  é ótimo, não existe controle admissível capaz de levar o sistema a um ponto interior de  $G^-$  no tempo  $T$ . Pois em qualquer ponto interior de  $G^-$  a funcional  $S$  assume um valor menor do que o obtido na otimização. A partir disso e da interpretação geométrica da condição do máximo pode-se concluir<sup>[6]</sup> que o vetor  $p(T)$ , no instante  $T$ , é ortogonal a um hiperplano  $\alpha$  que é suporte do conjunto  $G^-$  no ponto  $x^1$ , e deve estar orientado no sentido de  $G^-$ . Hiperplano suporte de um conjunto é um hiperplano que contém pelo menos um ponto do conjunto, e é tal que o conjunto fique todo de um só lado do hiperplano.

Neste ponto é importante recordar que no caso anterior, condições finais livres,  $p(T)$  tinha a mesma direção que  $\dot{x}(T)$  e tinha sentido oposto ao do vetor  $c$ . No presente caso, a condição do máximo no ponto final da trajetória pode ter a seguinte interpretação: para  $S$  ser minimizada, no instante final da trajetória de  $x$ ,  $\dot{x}$  deve ter a melhor direção possível, deve estar orientado na direção em que  $S$  mais decresce, portanto, para o interior de  $G^-$  e com direção ortogonal a um hiperplano suporte de  $G^-$  no ponto  $x^1$  (lembre-se que  $G^-$  é convexo).

Se o hiperplano suporte  $\alpha$  for definido por uma equação do tipo

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - x_i^1) = 0$$

onde os coeficientes  $\alpha_i$  são escolhidos de tal maneira que o conjunto  $G^-$  fique do lado do hiperplano em que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - x_i^1) \leq 0$$

então  $p_i(T) = -\alpha_i$   $i=1, 2, \dots, n$

ou em forma vetorial,

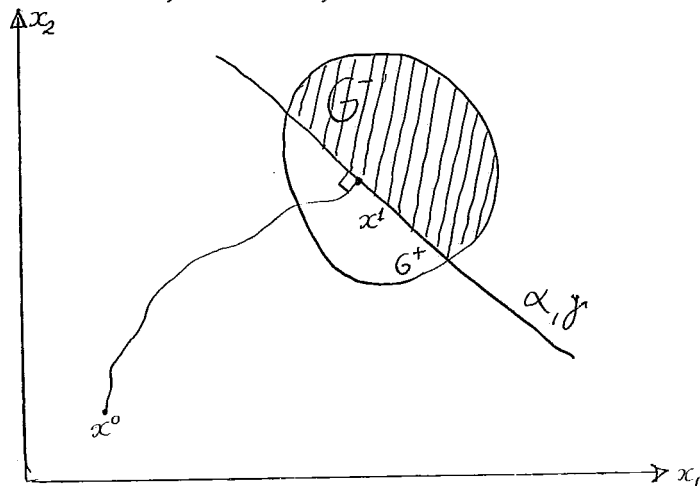
$$p(T) = -\alpha$$

onde

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

O ponto final ótimo pode estar no interior de  $G$  ou na fronteira de  $G$ . Nos dois casos a determinação dos coeficientes  $\alpha_i$  se faz de maneira diferente; embora, na verdade, o primeiro caso seja caso particular do segundo.

No primeiro caso, em que  $x^1 \in \dot{G}$ , os hiperplanos  $\alpha$  e  $\gamma$  se confundem, isto é, coincidem.



Disso se pode concluir que  $\alpha_i = \gamma_i$  e que portanto

$$p_i(T) = -\gamma_i \quad i=1,2,\dots,n$$

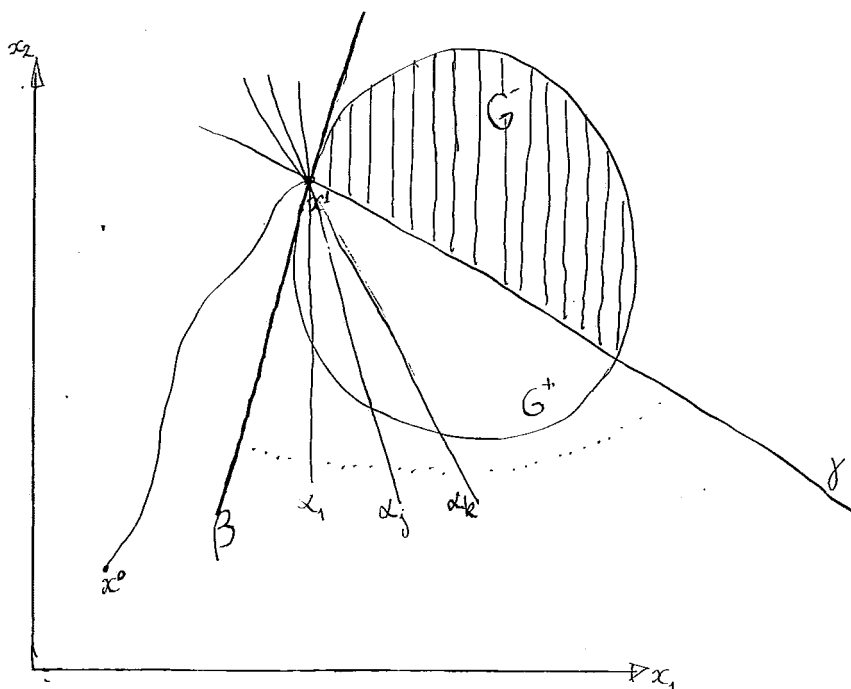
ou, em forma vetorial,

$$p(T) = -\gamma$$

onde

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

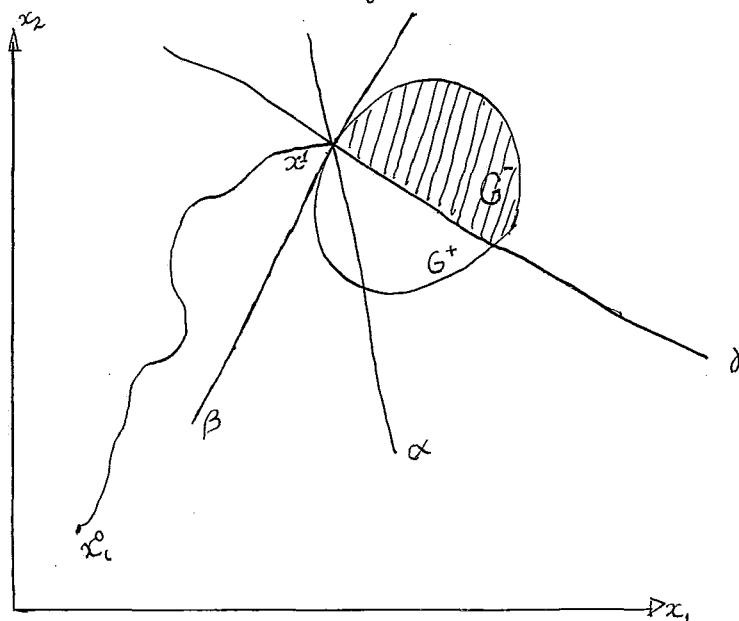
No segundo caso, em que  $x^1$  pertence à fronteira de  $G$ , o hiperplano tangente a  $G^-$  não fica perfeitamente determinado, pois  $x^1$  ficará situado numa aresta.



Consideremos que passa pelo ponto  $x^1$  um hiperplano  $\beta$ , suporte do conjunto  $G$ . Este hiperplano ficará definido pela equação:

$$\sum_{i=1}^n \beta_i (x_i - x_i^1) \leq 0$$

Pode-se notar que o hiperplano  $\alpha$  que é suporte de  $G^-$  deve ficar entre os hiperplanos  $\gamma$  e  $\beta$ .



Como  $G^-$  fica do lado do hiperplano  $\alpha$  em que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - x_i^1) \leq 0$$

obtemos a seguinte expressão para os valores dos coeficientes  $\alpha_i$ :

$$\alpha_i = \theta \gamma_i + \bar{\theta} \beta_i \quad i=1,2,\dots,n$$

onde

$$\begin{aligned} \theta, \bar{\theta} &\geq 0 \\ \theta + \bar{\theta} &= 1 \end{aligned}$$

Seja, por exemplo, o conjunto  $G$  definido por

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$$

de modo que os pontos de fronteira são dados por

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Se  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é diferenciável, então os coeficientes  $\beta_i$  são dados por

são dados por

$$\beta_i = \frac{\partial F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Com procedimentos desse tipo podem ficar determinadas as  $2n$  condições de contorno para o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial x_i} \\ \dot{p}_i &= - \frac{\partial H}{\partial x_i} \end{aligned} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (27)$$

Portanto, resumindo as condições de contorno do sistema (27):

$n$  condições iniciais  $x_i(0)$

$n$  condições finais  $p_i(T)$

$p_i(T)$  são dadas por:

$$p_i(T) = - \gamma_i \text{ quando } x(T) \in G$$

$$p_i(T) = \alpha_i = \theta \gamma_i + \bar{\theta} \beta_i$$

E desse ponto em diante o princípio do máximo de Pontryagin é aplicado da maneira usual, conforme vimos na seção anterior.

Agora vamos apresentar alguns casos particulares de determinação das condições de contorno.

O conjunto  $G$  geralmente é definido por uma desigualdade do tipo

$$F(x_1, \dots, x_n) \leq 0$$

Se alguma coordenada  $x_s$  não participa desta desigualdade, então o coeficiente correspondente  $\beta_s$  do hiperplano suporte de



$G$  tem valor zero. Neste caso o conjunto  $G$  será gerado por uma geratriz paralela ao eixo de coordenada  $x_s$ .

Em muitos casos de importância prática o conjunto  $G$  é contituido de uma linha ou superfície do espaço de estado e conseqüentemente não possui pontos interiores. Em particular, este caso ocorre quando algumas coordenadas são fixadas para o instante  $t=T$ . Por exemplo, quando

$$x_s(T) = x_s^1 \quad s=1,2,\dots,q \quad ; \quad q < n \quad (28)$$

Casos deste tipo são resolvidos admitindo-se, na prática, uma pequena violação da condição de  $G$  possuir interior não vazio. Ou seja:

$$\sum_{s=1}^q (x_s - x_s^1)^2 \leq \xi^2 \quad (29)$$

onde  $\xi > 0$  é suficientemente pequeno. Essa desigualdade define um conjunto fechado e convexo que possui pontos interiores. Satisfazendo-se então a condição de  $G$  possuir interior não vazio. Mas, para  $\xi$  suficientemente pequeno, o erro introduzido ao utilizarmos a condição (29) em vez da condição (28) será desprezível. Já que fizemos uma concessão que a prática admite, podemos ir um pouco adiante e usar as condições de contorno (28) nas equações (27) para as  $q$  variáveis correspondentes. Se a equação que determina  $G$  não depende das  $n-q$  variáveis restantes, então  $\beta_{q+1} = \dots = \beta_n = 0$ . E neste caso teríamos o seguinte conjunto de condições de contorno para o sistema (27):

condições iniciais	$x_i(0)$	$i=1,2,\dots,n$
condições finais	$x_s(T)=x_s^1$	$s=1,2,\dots,q$
	$p_i(T)=0$	$i=q+1,\dots,n$

Um problema que também surge com freqüência é aquele em que se quer determinar os controles que otimizam uma integral

$$S = \int_0^T L(x,u,t)dt$$

onde os valores das coordenadas são fixos para os instantes  $t=0$  e  $t=T$ :

$$\begin{aligned} x_i(0) &= x_i^0 & i=1,2,\dots,n \\ x_i(T) &= x_i^1 & i=1,2,\dots,n \end{aligned} \quad (30)$$

A nova variável que costumávamos definir usando a função objetivo

$$x_{n+1} = \int_0^t L(x,u,t)dt$$

não entra agora na definição do conjunto  $G$  ou do ponto final  $x^1$  em (30). Não entra também no conjunto de equações diferenciais que definem o sistema

$$\dot{x}_i = f_i(x,u,t) \quad i=1,2,\dots,n$$

e no caso do sistema auxiliar vamos ter o seguinte:

$$\dot{p}_{n+1}(t) = 0$$

$$c_1=c_2=\dots=c_n=0$$

$$c_{n+1} = 0$$

mas  $p_{n+1}(T) = -1$

e portanto

$$p_{n+1}(t) = -1$$

Daí se conclue que o sistema de equações (27) toma

a seguinte forma:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i=1,2,\dots,n$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad i=1,2,\dots,n$$

$$p_{n+1} = -1$$

$$H = \sum_{i=1}^n p_i f_i(x,u,t) - L(x,u,t) \quad (31)$$

pois  $p_{n+1}(t) = -1$

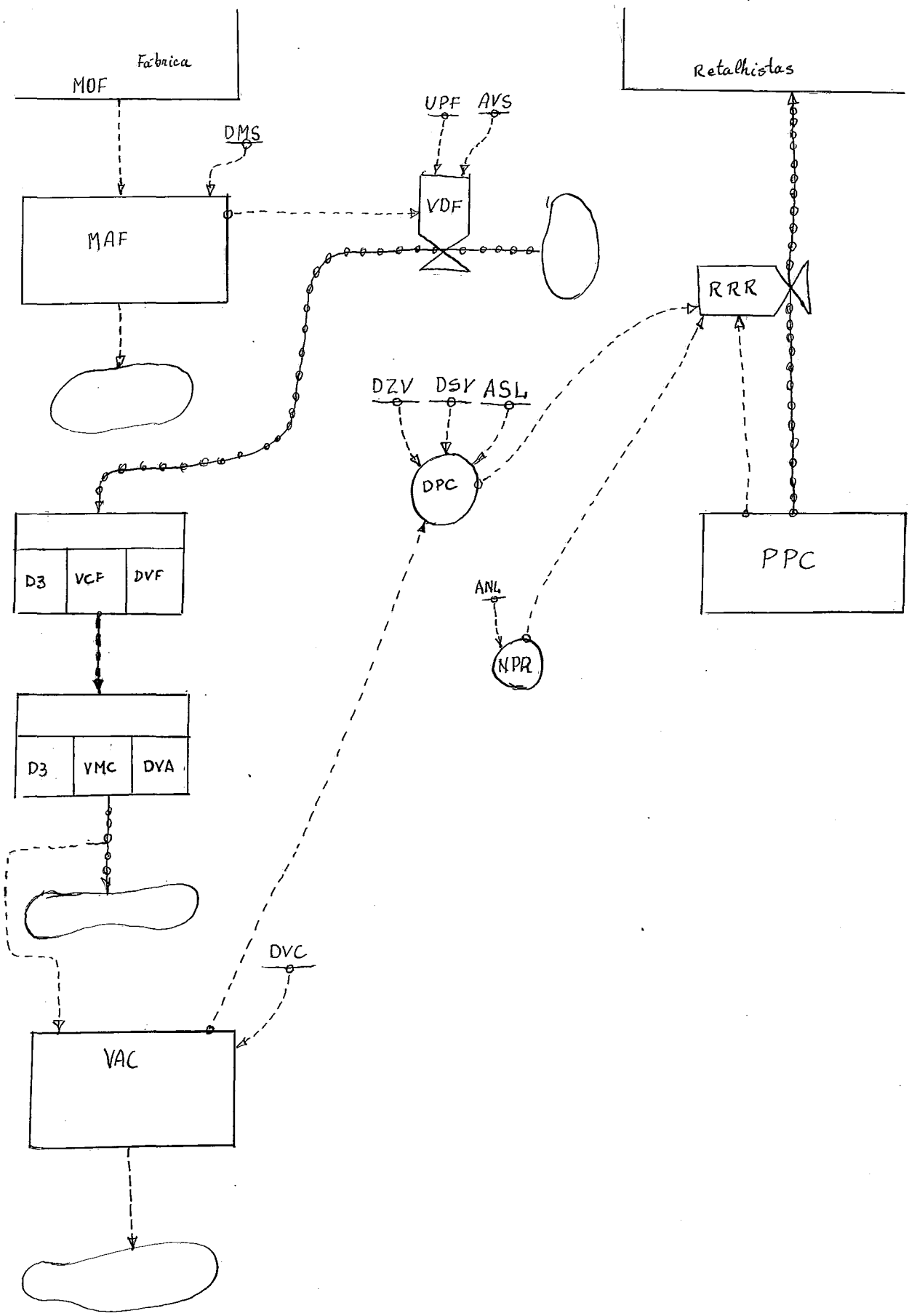
$$\dot{x}_{n+1} = L(x,u,t)$$

E as condições de contorno:

$$\begin{aligned} x_i(0) &= x_i^0 \\ x_i(T) &= x_i^1 \end{aligned} \quad i=1,2,\dots,n$$

Agora vamos apresentar um exemplo para ilustrar a resolução de problemas de controle ótimo com condições finais fixas. Trata-se de um problema de investimento em publicidade do mesmo sistema produção-distribuição do exemplo anterior. Maiores detalhes sobre a construção do modelo e simulação deste sistema podem ser encontrados na referência [8] .

Por meio de propaganda uma empresa pode exercer influência sobre o número de pedidos de compras aos retalhistas. Isto é que se pretendeu estudar quando, usando métodos de Dinâmica Industrial, se construiu um modelo do setor de publicidade do sistema produção-distribuição já mencionado. O diagrama do modelo é apresentado na próxima página.



Vamos dar breves explicações sobre o diagrama e as variáveis que nele aparecem. Acompanhe pelo diagrama. VDF é o fluxo de recursos que é decidido aplicar em publicidade. É medido em dinheiro/semana. A decisão sobre a quantia a ser investida em publicidade depende de duas constantes, UPF e AVS, e de uma variável MAF. UPF é o preço de cada unidade fabricada (dinheiro por unidade). AVS é a constante de proporcionalidade entre publicidade e vendas (adimensional). MAF é o fluxo médio de produção da fábrica. (unidades/semana). MAF é obtido computando-se o fluxo de ordens de produção, MOF, e fazendo-se a média de cada período. A elaboração da média demora um certo tempo, que é caracterizado pela constante de tempo DMS. (semanas).

Uma vez feita a decisão de investimento, a aplicação do dinheiro, VCF, é autorizada com um certo atraso de tempo, de terceira ordem. VCF é medida em dinheiro/semana; e o atraso é caracterizado pela constante de tempo DVF (semanas).

A aplicação do dinheiro gera um fluxo de propaganda apresentada ao consumidor, VMC. VMC é medida em dinheiro por semana e está sempre atrasada de dinheiro aplicado por um atraso de terceira ordem de constante de tempo DVA (semanas).

O consumidor demora um certo tempo para tomar conhecimento da propaganda apresetada. Essa demora é caracterizada pela constante de tempo DVC (semanas). A propaganda da qual o consumidor toma conhecimento também é medida em dinheiro/semana.

A tomada de conhecimento da propaganda vai influir, com um certo atraso, no fluxo de pedidos de compra aos retalhistas, RRR (unidades/semana). O atraso de tempo é caracterizado pela constante DPC (semanas). DPC depende de tres contantes, ASL, DSV e DZV. ASL é o limite de saturação da propaganda (dinheiro/semana). DSV é a contante de tempo de compra com saturação de propaganda, e DZV é a constante de tempo para compra na ausência de propaganda.

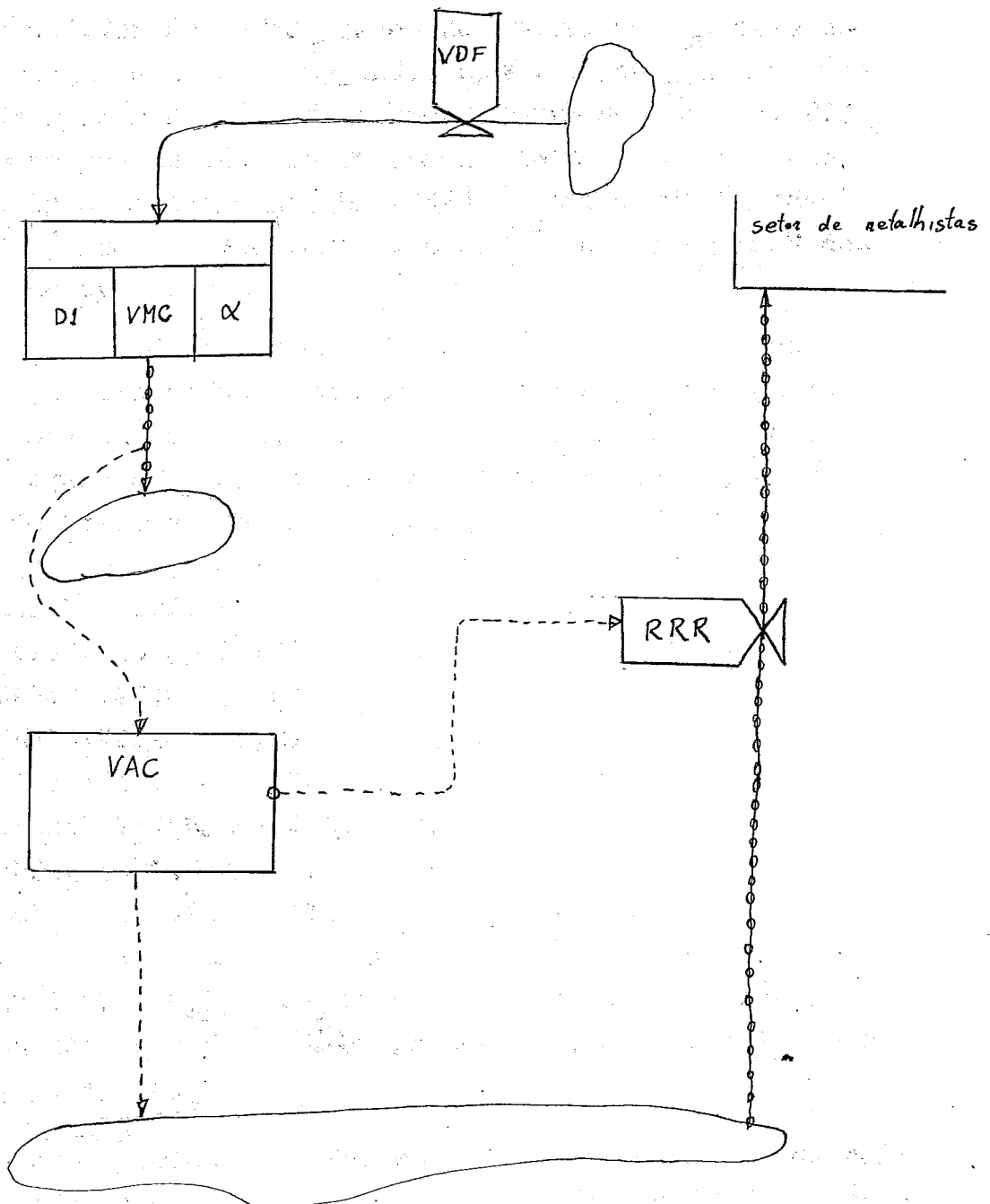
O fluxo de pedidos de compra recebidos pelos retalhistas depende da atenção dada à propaganda, com o atraso já mencionado, depende também do número de compradores potenciais, PPC, e depende dos pedidos de compra completamente independentes da influência da propaganda, NPR. RRR é medido em unidades/semana, PPC é medido em unidades, e NPR é medido em unidades/semana.

A seguir damos as expressões formais das relações entre as variáveis do sistema que tentamos explicar acima. Nas expressões que seguem,  $J$ ,  $K$  e  $L$  são instantes de tempo,  $JK$  é o intervalo de tempo entre os instantes  $J$  e  $K$ , e  $KL$  é o intervalo de tempo entre os instantes  $K$  e  $L$ .

$$\begin{aligned} VDF(KL) &= (MAF(K))(UPF)(AVS) \\ MAF(K) &= MAF(J) + (DT/DMS)(MOF(JK) - MAF(J)) \\ VCF(KL) &= DELAY3(VDF(JK), DVF) \\ VMC(KL) &= DELAY3(VCF(JK), DVA) \\ VAC(K) &= VAC(J) + (DT/DVC)(VMC(JK) - VAC(J)) \\ DPC(K) &= DSV + (DZV - DSV)e^{-VAC(K)/ASL} \\ RRR(KL) &= (PPC(K)/DPC(K))(1 + NPR(K)) \\ PPC(K) &= PPC(J) + (DT)(CMP - RRR(JK)) \end{aligned}$$

Em tempo,  $CMP$  é uma constante que indica o número médio de pessoas que durante um período passam a fazer parte do mercado potencial.

O que apresentamos foi um modelo bem realista da parte relacionada com a publicidade do sistema produção-distribuição. Os resultados da simulação deste modelo podem ser vistos na referência [8]. Para ilustrar a aplicação de controle ótimo, nosso exemplo será uma simplificação deste modelo. O modelo simplificado que usaremos, em termos de Dinâmica Industrial, tem o diagrama da próxima página.



Como se vê, a simplificação feita é grande. Foram eliminadas as variáveis auxiliares e o processo intermediário VCF. Porém a alteração fundamental está em VDF, a decisão sobre o investimento, que no momento ainda não está dependendo de nenhum parâmetro ou variável, fluxo ou nível. Justamente VDF será nossa variável de controle, que poderá ser escolhida arbitrariamente dentro de um conjunto de controles viáveis. Vamos aproveitar esta liberdade para escolher VDF de tal maneira que seja otimizada uma função critério. Noutras palavras poderíamos dizer que vamos aproveitar o fato de VDF não estar ligado a nenhum fluxo ou nível para, nós mesmos, ligá-lo de tal maneira que seja otimizada uma função critério.

Antes de continuar vamos apresentar melhor nosso sistema.

A propaganda apresentada ao consumidor no instante  $t$ ,  $VMC(t)$ , está relacionada com o investimento que se decide fazer,  $VDF(t)$ , por meio de uma relação que leva em conta um atraso exponencial de constante de tempo  $\alpha$ :

$$VMC(t) = \int_0^t k_1 VDF(t-\tau) e^{-\tau/\alpha} d\tau + VMC(0)$$

Convém comparar essa relação com aquela que liga estas mesmas variáveis no modelo original para se notar a extensão da simplificação. O atraso lá era de terceira ordem, enquanto aqui foi simplificado para primeira ordem. O modelo aqui é expresso de forma contínua, enquanto lá era de forma discreta, para ser tratado em computador digital.

A relação que acabamos de apresentar pode ser transformada em equação diferencial. Usando transformada de Laplace:

$$VMC(s) = VDF(s) \frac{k}{1 + \alpha s}$$



onde  $k = k_1 \alpha$

$$sVMC(s) = \frac{k}{\alpha} VDF(s) - \frac{1}{\alpha} VMC(s)$$

$$\dot{VMC}(t) = \frac{k}{\alpha} VDF(t) - \frac{1}{\alpha} VMC(t)$$

com a condição inicial  $VMC(0)$

A atenção do consumidor à propaganda no instante  $t$ ,  $VAC(t)$ , varia segundo uma função da diferença entre a propaganda apresentada e a atenção que o consumidor está dando à propaganda. No modelo original esta relação era dada por:

$$VAC(K) = VAC(J) + (DT/DVC)(VMC(JK) - VAC(J))$$

\* Chamamos a atenção para que se note o termo  $DT/DVC$ , que justifica a forma integral da expressão do nosso modelo. O nosso atraso exponencial será caracterizado por uma constante de tempo  $\beta$ .

$$\dot{VAC}(t) = \int_0^t k_2 [VMC(t-\tau) - VAC(t-\tau)] e^{-\tau/\beta} d\tau + VAC(0)$$

Da mesma forma que na equação anterior, esta também pode ser transformada em equação diferencial.

$$\ddot{VAC}(t) = \frac{k'}{\beta} [VMC(t) - VAC(t)] - \frac{1}{\beta} VAC(t)$$

onde  $k' = k_2 \beta$

O número de pedidos dos consumidores aos retalhistas,  $RRR(t)$ , está relacionado com a atenção à propaganda por meio de uma equação diferencial com um atraso de constante de tempo unitária. Aqui, comparando com o modelo original, a simplificação foi bem grande, pois eliminamos entre  $VAC$  e  $RRR$  várias equações auxiliares. Também não consideramos as

as vendas que não são devidas à influência da propaganda.

$$RRR(t) = RRR(0) + k_3 \int_0^t VAC(t-\tau) e^{-\tau} d\tau$$

que na forma de equação diferencial é

$$\dot{RRR}(t) = k'' VAC(t) - RRR(t)$$

onde  $k'' = k_3$

Deseja-se, no intervalo de tempo  $[0, T]$  levar as vendas a atingir um determinado valor,  $RRR_1$ , maximizando um lucro que é dado pela equação:

$$S = \int_0^T (RRR(t) - VMC(t)) dt$$

Como já vimos, a nossa variável de controle será  $VDF(t)$ . Este controle tem limites inferior e superior:

$$\underline{VDF} \leq VDF(t) \leq \overline{VDF}$$

Agora podemos agrupar as equações:

$$\dot{VMC}(t) = \frac{k}{\alpha} VDF(t) - \frac{k}{\alpha} VMC(t)$$

$$\ddot{VAC}(t) = -\frac{k'}{\beta} VAC(t) - \frac{k'}{\beta} VAC(t) + \frac{k'}{\beta} VMC(t)$$

$$\dot{RRR}(t) = k'' VAC(t) - RRR(t)$$

A equação de segunda ordem

$$\ddot{VAC}(t) = -\frac{k'}{\beta} VAC(t) - \frac{k'}{\beta} VAC(t) + \frac{k'}{\beta} VMC(t)$$

pode ser expressa por meio de duas equações diferenciais de primeira ordem:

$$\dot{VAC1}(t) = VAC2(t)$$

$$\dot{VAC2}(t) = -\frac{k'}{\beta}VAC2(t) - \frac{k'}{\beta}VAC1(t) + \frac{k'}{\beta}VMC(t)$$

De modo que temos um sistema de quatro equações:

$$\dot{VMC}(t) = k_1 VDF(t) - k_2 VMC(t)$$

$$\dot{VAC1}(t) = VAC2(t)$$

$$\dot{VAC2}(t) = -k_3 VAC2(t) - k_4 VAC1(t) + k_5 VMC(t)$$

$$\dot{RRR}(t) = k_6 VAC1(t) - k_7 RRR(t)$$

(32)

com as condições iniciais:  $VMC(0)$

$$VAC1(0)$$

$$VAC2(0)$$

$$RRR(0)$$

e com a condição final  $RRR(T) = RRR1$

e onde

$$k_1 = k_2 = \frac{k}{\alpha}$$

$$k_3 = k_5 = \frac{k'}{\beta}$$

$$k_4 = \frac{1}{\beta}$$

$$k_6 = k_7 = k''$$

Em forma vetorial temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{VMC} \\ \dot{VAC1} \\ \dot{VAC2} \\ \dot{RRR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_5 & -k_4 & -k_3 & 0 \\ 0 & k_6 & 0 & -k_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} VMC \\ VAC1 \\ VAC2 \\ RRR \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} VDF$$

A hamiltoniana neste caso é dada pela fórmula (31)

$$H(x,p,u,t) = \sum_{s=1}^n p_s f_s(x,u,t) - L(x,u,t)$$

$$L(x,u,t) = RRR(t) - VMC(t)$$

$$\text{Usando a equação } \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad i=1,2,3,4$$

podemos obter o sistema de equações auxiliares

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial VMC} = k_2 p_1 - k_5 p_3 = 1$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial VAC1} = k_4 p_3 - k_6 p_4$$

$$\dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial VAC2} = -p_2 + k_3 p_3$$

$$\dot{p}_4 = -\frac{\partial H}{\partial RRR} = k_7 p_4 + 1$$

com as condições finais

$$\begin{aligned} p_1(T) &= 0 \\ p_2(T) &= 0 \\ p_3(T) &= 0 \end{aligned}$$

Em forma vetorial temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_3 \\ \dot{p}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & 0 & -k_5 & 0 \\ 0 & 0 & k_4 & -k_6 \\ 0 & -1 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\dot{p} = Ap + B$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} k_2 & 0 & -k_5 & 0 \\ 0 & 0 & k_4 & -k_6 \\ 0 & -1 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A solução deste sistema é dada por

$$p(t) = e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B d\tau + e^{At} D$$

onde  $D$  é um vetor constante determinado pelas condições de contorno.

Para resolver este sistema de equações diferenciais comecemos por calcular  $e^{At}$ .

$$\det[A - \lambda I] = 0 = \det \begin{bmatrix} k_2 - \lambda & 0 & -k_5 & 0 \\ 0 & -\lambda & k_4 & -k_6 \\ 0 & -1 & k_3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_7 - \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (k_2 - \lambda)(k_7 - \lambda) [-\lambda(k_3 - \lambda) + k_4] - (k_2 - \lambda)(k_7 - \lambda)\lambda(k_3 - \lambda) + (k_2 - \lambda)(k_7 - \lambda)k_4 + (k_2 - \lambda)(k_7 - \lambda)k_4 - (k_2 - \lambda)(k_7 - \lambda)\lambda(k_3 - \lambda) + (k_2 - \lambda)(k_7 - \lambda) [-\lambda(k_3 - \lambda) + k_4] = 0$$

daí se pode ver imediatamente que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= k_2 \\ \lambda_4 &= k_7 \end{aligned}$$

$$-2\lambda(k_3 - \lambda) + 4k_4 - 2\lambda(k_3 - \lambda) = 0$$

$$\lambda^2 - k_3\lambda + k_4 = 0$$

$$\lambda = \frac{k_3 \pm \sqrt{k_3^2 - 4k_4}}{2}$$

Das equações que definem o sistema (32) pode-se ver que  $k_3 = k_4 k'$ , e dos estudos feitos para construção do modelo chegou-se ao resultado  $k_3, k_4 < 4$ , portanto, vamos ter autovalores complexos conjugados. Conforme já vimos, para o cálculo de  $e^{At}$  vamos utilizar apenas um desses autovalores complexos:

$$\lambda_3 = \frac{k_3 + i\sqrt{4k_4 - k_3^2}}{2}$$

Cálculo dos autovetores:

$$\lambda_1 = k_2 :$$

$$[A - \lambda_1 I] V_1 = 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k_5 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_4 & -k_6 \\ 0 & -1 & k_3 - k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_7 - k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} e^{k_2 t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -k_5 C &= 0 \\ -k_2 B + k_4 C - k_6 D &= 0 \\ -B + (k_3 - k_2) C &= 0 \\ (k_7 - k_2) D &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 0 \\ C &= 0 \\ D &= 0 \end{aligned} \quad \therefore \quad V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{k_2 t}$$

$$\lambda_4 = k_7 :$$

$$[A - \lambda_4 I] V_2 = 0 = \begin{bmatrix} k_2 - k_7 & 0 & -k_5 & 0 \\ 0 & -k_7 & k_4 & -k_6 \\ 0 & -1 & k_3 - k_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} e^{k_7 t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (k_2 - k_7) A - k_5 C &= 0 \\ -k_7 B + k_4 C - k_6 D &= 0 \\ -B + (k_3 - k_7) C &= 0 \end{aligned}$$

$$A = \frac{k_5}{k_2 - k_7} \quad B = \frac{1}{k_3 - k_7} \quad C = 1 \quad D = \frac{k_4}{k_6} \frac{k_7}{k_6} \frac{1}{k_3 - k_7}$$

$$V_4 = \begin{bmatrix} \frac{k_5}{k_2 - k_7} \\ \frac{1}{k_3 - k_7} \\ 1 \\ \frac{k_4}{k_6} - \frac{k_7}{k_6} \frac{1}{k_3 - k_7} \end{bmatrix} e^{k_7 t}$$

$$\lambda_3 = \frac{k_3 + i \sqrt{4k_4 - k_3^2}}{2} :$$

Vamos definir  $M = \frac{\sqrt{4k_4 - k_3^2}}{2} \therefore \lambda_3 = \frac{k_3}{2} + iM$

$$[A - \lambda_3 I] V_3 = \begin{bmatrix} k_2 - \frac{k_3}{2} - iM & 0 & -k_5 & 0 \\ 0 & -\frac{k_3}{2} - iM & k_4 & -k_6 \\ 0 & -1 - iM & k_3 - \frac{k_3}{2} - iM & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_7 - \frac{k_3}{2} - iM \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} e^{(k_3/2 + iM)t} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí obtemos  $A = \frac{k_5 (k_2 - \frac{k_3}{2} + iM)}{(k_2 - \frac{k_3}{2})^2 + M^2}$

$$B = \frac{k_3}{2} - iM$$

$$C = 1$$

$$D = \frac{k_4}{k_6} - \left( \frac{k_3}{2k_6} + i\frac{M}{k_6} \right) \left( \frac{k_3}{2} - iM \right) = \frac{k_4}{k_6} - \frac{1}{k_6} \left( \frac{k_3^2}{4} + M^2 \right)$$

e portanto

$$V_3 = \begin{bmatrix} \frac{k_5(k_2 - \frac{k_3}{2} + iM)}{(\frac{k_3}{2})^2 + M^2} \\ \frac{k_3}{2} - iM \\ 1 \\ \frac{k_4}{k_6} - \frac{1}{k_6} \left( \frac{k_3^2}{4} + M^2 \right) \end{bmatrix} e^{k_3 t/2} (\cos Mt + i \sin Mt)$$

Vamos definir  $(\frac{k_3}{2})^2 + M^2 = N$

$$V_3 = \begin{bmatrix} \frac{k_5(k_2 - \frac{k_3}{2})}{N} \cos Mt - \frac{M}{N} k_5 \sin Mt \\ \frac{k_3}{2} \cos Mt + M \sin Mt \\ \cos Mt \\ \left( \frac{k_4}{k_6} - \frac{k_3^2}{4k_6} - \frac{M^2}{k_6} \right) \cos Mt \end{bmatrix} e^{k_3 t/2}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} \frac{k_5(k_2 - \frac{k_3}{2})}{N} \sin Mt + \frac{k_5 M}{N} \cos Mt \\ \frac{k_3}{2} \sin Mt - M \cos Mt \\ \sin Mt \\ \left( \frac{k_4}{k_6} - \frac{k_3^2}{4k_6} - \frac{M^2}{k_6} \right) \sin Mt \end{bmatrix} e^{k_3 t/2}$$



$e^{At}$  será dada pela matriz  $[V_1, V_2, V_3, V_4]$

Agora vamos calcular  $e^{-At}$ . A maneira de calcular é a mesma, a única diferença ocorre no cálculo dos autovalores que agora serão calculados a partir da fórmula:

$$\det(-A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -k_2 - \lambda & 0 & k_5 & 0 \\ 0 & -\lambda & -k_4 & k_6 \\ 0 & 1 & -k_3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_7 - \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (k_2 + \lambda)(k_7 + \lambda) [2 [\lambda(k_3 + \lambda) + k_4] + 2\lambda(k_3 + \lambda) + 2k_4] = 0$$

$$\lambda_1 = -k_2$$

$$\lambda_2 = -k_7$$

$$\lambda^2 + k_3\lambda + k_4 = 0$$

$$\lambda = \frac{-k_3 \pm \sqrt{k_3^2 - 4k_4}}{2}$$

$$\lambda_3 = -\frac{k_3}{2} - iM$$

onde  $M = \frac{1}{2} \sqrt{4k_4 - k_3^2}$

Analogamente ao caso anterior obtemos:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-k_2 t}$$

$$W_4 = \begin{bmatrix} \frac{k_5}{k_2 - k_7} \\ \frac{1}{k_3 - k_7} \\ 1 \\ \frac{k_4}{k_6} - \frac{k_7}{k_6(k_3 - k_7)} \end{bmatrix} e^{-k_7 t}$$

$$\lambda_3 = -\left(\frac{k_3}{2} + iM\right): \quad V(\lambda_3) = \begin{bmatrix} \frac{k_5(k_2 - \frac{k_3}{2} + iM)}{(k_2 - \frac{k_3}{2})^2 + M^2} \\ \frac{k_3}{2} - iM \\ 1 \\ \frac{k_4}{k_6} - \frac{1}{k_6} \left(\frac{k_3^2}{4} + M^2\right) \end{bmatrix} e^{-k_3 t/2} (\cos Mt - i \sin Mt)$$

$$\text{definimos } N = \left(k_2 + \frac{k_3}{2}\right)^2 + M^2$$

e obtemos

$$W_3 = \begin{bmatrix} \frac{k_5(k_2 + k_3/2)}{N} \cos Mt + \frac{k_5 M}{N} \sin Mt \\ \frac{k_3}{2} \cos Mt - M \sin Mt \\ \cos Mt \\ \left(\frac{k_4}{k_6} - \frac{k_3^2}{4k_6} - \frac{M^2}{k_6}\right) \cos Mt \end{bmatrix} e^{-k_3 t/2}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} -\frac{k_5(k_2 - \frac{k_3}{2})}{N} \sin Mt + \frac{k_5 M}{N} \cos Mt \\ -\frac{k_3}{2} \sin Mt - M \cos Mt \\ -\sin Mt \\ -\left(\frac{k_4}{k_6} - \frac{k_3^2}{4k_6} - \frac{M^2}{k_6}\right) \sin Mt \end{bmatrix} e^{-k_3 t/2}$$

$e^{-At}$  será dada por  $[W_1, W_2, W_3, W_4]$

Continuando a resolução do problema, devemos calcular

$$e^{-At} B = [W_1, W_2, W_3, W_4] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -W_1 + W_4$$

$$e^{-At} B = \begin{bmatrix} -e^{-k_2 t} + \frac{k_5}{k_2 - k_7} e^{-k_7 t} \\ \frac{1}{k_3 - k_7} e^{-k_7 t} \\ e^{-k_7 t} \\ \frac{k_4}{k_6} - \frac{k_7}{k_6(k_3 - k_7)} e^{-k_7 t} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^t e^{-A\tau} B d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_2} e^{-k_2 t} - \frac{k_5}{k_7} \frac{1}{k_2 - k_7} e^{-k_7 t} \\ - \frac{1}{k_7} \frac{1}{k_3 - k_7} e^{-k_7 t} \\ - \frac{1}{k_7} e^{-k_7 t} \\ - \frac{1}{k_7} \frac{k_4}{k_6} - \frac{k_7}{k_6 (k_3 - k_7)} e^{-k_7 t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(t) = e^{At} \left[ \int_0^t e^{-A\tau} B d\tau + D \right] &= \left[ \frac{1}{k_2} e^{-k_2 t} - \frac{k_5}{k_7} \frac{1}{k_2 - k_7} e^{-k_2 t} + D_1 \right] v_1 + \\ &+ \left[ \frac{1 - e^{-k_7 t}}{k_7 (k_3 - k_7)} + D_2 \right] v_2 + \left[ \frac{1}{k_7} e^{-k_7 t} + D_3 \right] v_3 + \\ &+ \left[ - \left( \frac{k_4}{k_6 k_7} - \frac{1}{k_6 (k_3 - k_7)} \right) e^{-k_7 t} + D_4 \right] v_4 \end{aligned} \quad (33)$$

onde

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}$$

A hamiltoniana do nosso problema é dada por

$$H(x, p, u, t) = p_1 \dot{V}MC + p_2 \dot{V}AC1 + p_3 \dot{V}AC2 + p_4 \dot{R}RR - L(x, u, t)$$

que, não é difícil ver, tem somente o termo

$$p_1 \dot{V}MC$$

dependente do controle VDF.

As constantes  $D_2, D_3$  e  $D_4$  podem ser expressas em função de  $D_1$  porque são conhecidas tres condições de contorno do sistema auxiliar. As expressões seriam da forma:

$$D_2 = K_1 D_1 + K_2$$

$$D_3 = K_3 D_1 + K_4$$

$$D_4 = K_5 D_1 + K_6$$

As constantes  $K_1, \dots, K_6$  são determinadas a partir de (33).

Para minimizar a hamiltoniana, VDF deve assumir valores dos limites inferior ou superior do conjunto de controles admissíveis, dependendo do sinal, positivo ou negativo, do valor de  $p_1(t)$  a cada instante. Se  $p_1(t)$  é positivo,  $VDF(t)$  assume seu menor valor. Se  $p_1(t)$  é negativo,  $VDF(t)$  assume o seu maior valor. Ou seja:

$$VDF(t) = \begin{cases} \underline{VDF} & \text{se } p_1(t) > 0 \\ \overline{VDF} & \text{se } p_1(t) < 0 \\ \text{indeterminado} & \text{se } p_1(t) = 0 \end{cases}$$

Na equação (33)  $p_1(t)$  fica determinado, a menos da constante  $D_1$ .  $D_1$  deve ser escolhido de tal maneira que o controle  $VDF(t)$  consiga levar  $RRR(t)$  do ponto  $RRR(0)$ , no instante inicial, até o seu valor final  $RRR1$  no instante  $T$ .

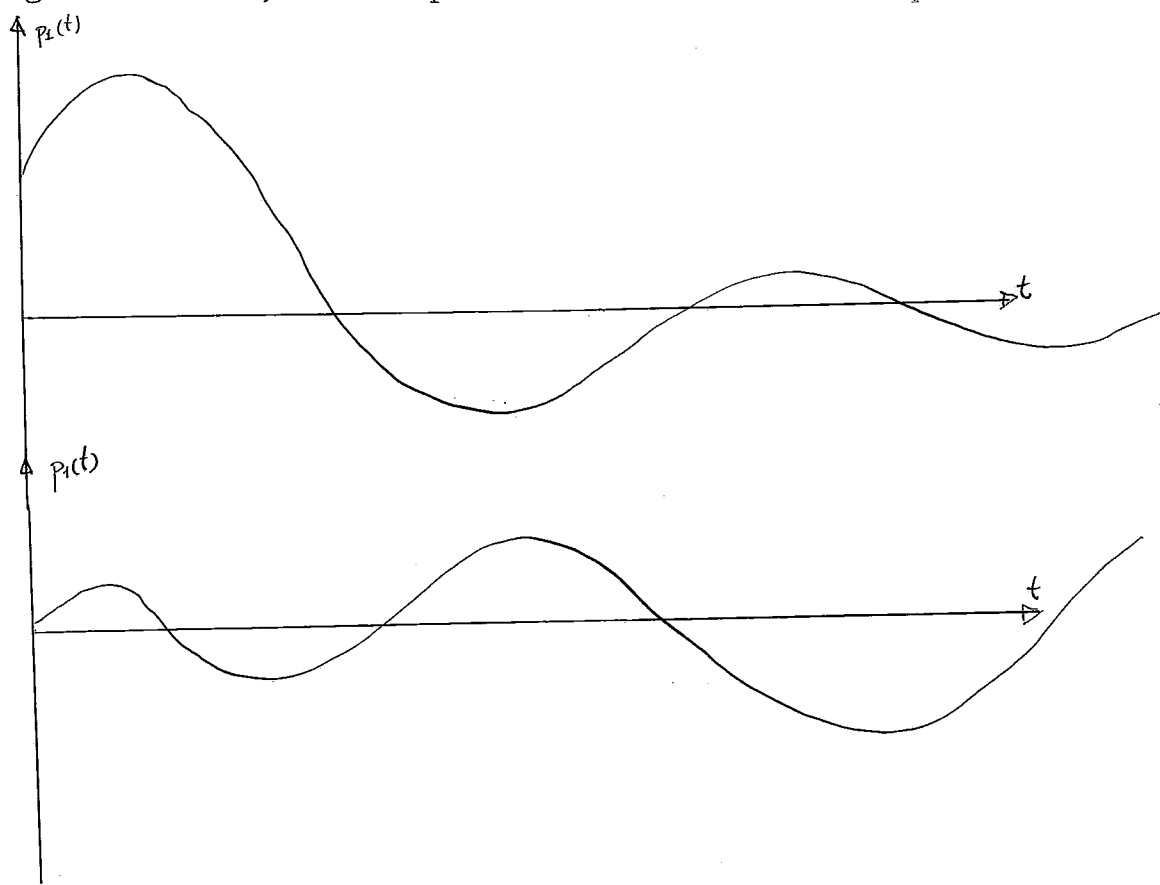
A expressão de  $p_1(t)$  é:

$$\begin{aligned} p_1(t) = & \left[ \frac{1}{k_2} e^{-k_2 t} - \frac{k_5}{k_7} \frac{1}{k_2 - k_7} e^{-k_7 t} + D_1 \right] e^{k_2 t} + \\ & + \left[ - \frac{e^{-k_7 t}}{k_7 (k_3 - k_7)} + K_1 D_1 + K_2 \right] \left[ \frac{k_5 (k_2 - \frac{k_3}{2})}{N} \sin Mt + \right. \\ & \left. + \frac{k_5 M}{N} \cos Mt \right] e^{k_3 t/2} + \left[ \frac{1}{k_7} e^{-k_7 t} + K_3 D_1 + K_4 \right] \left[ \frac{k_5 (k_2 - \frac{k_3}{2})}{N} \cos Mt - \right. \end{aligned}$$

$$- \frac{Mk_5}{N} \operatorname{sen} Mt \left] e^{k_3 t/2} + \left[ -\left( \frac{k_4}{k_6 k_7} - \frac{1}{k_6 (k_3 - k_7)} \right) e^{-k_7 t} + K_5 D_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + K_6 \right] \frac{k_5 e^{k_7 t}}{k_2 - k_7}$$

Esta é uma equação, pelo menos aparentemente, muito complicada. Ou pelo menos, ainda aparentemente, complicada demais diante da simplicidade do problema apresentado.

Em primeiro lugar é necessário dizer que o problema não é tão simples como poderia fazer supor o reduzido número de equações. Acontece que o modelo é dinâmico, e que, portanto, seu tratamanto e sua solução são capazes de fornecer o comportamento do sistema no regime permanente e nos transitórios, o que são informações bem mais completas a respeito do sistema. Em segundo lugar, olhando com mais atenção podemos ver que na equação existem dois tipos de funções que variam com o tempo: funções exponenciais do tempo, e funções periódicas, senoidais, do tempo. A variável auxiliar  $p_1(t)$  poderá ter, por exemplo, comportamentos conforme as figuras abaixo, tudo dependendo dos valores dos parâmetros.



#### Seção 4 - Execução de tarefas quando o tempo não é especificado.

Dois outros casos podem ocorrer quando se quer transferir o sistema para um ponto ou uma região determinada do espaço de estados. Ambos possuem em comum a característica do tempo de percurso não ser determinada previamente. Mais especificamente, o primeiro caso seria aquele em que se deseja otimizar uma função critério ao se realizar uma tarefa, não importando o tempo necessário para sua realização. O outro caso seria aquele em que simplesmente se deseja executar uma tarefa no menor prazo possível.

Nos concentraremos agora no primeiro caso, que toma importância, por exemplo, quando se deseja verificar a viabilidade, quanto ao tempo, de atingir uma otimização "perfeita" da função critério. O valor da função critério encontrado nesta otimização é comparado com aquele obtido da otimização com tempo determinado. A diferença entre ambos e entre os valores respectivos da função critério podem fornecer meios para decidir se é conveniente ou não procurar melhores percursos em tempos maiores; ou seja, gastar mais tempo na execução da tarefa. Este problema também é importante quando sua solução é utilizada para servir de padrão de performances na execução de tarefas.

Seja  $G$  uma região do espaço de estados que se quer atingir. O instante em que se alcança  $G$  minimizando a função objetivo é desconhecido. Vamos denominá-lo  $T^*$ .

Se pudermos determinar  $T^*$ , nosso problema se tornará o mesmo da seção anterior onde o tempo era fixo. Justamente o que faremos agora é procurar um meio de determinar  $T^*$ .

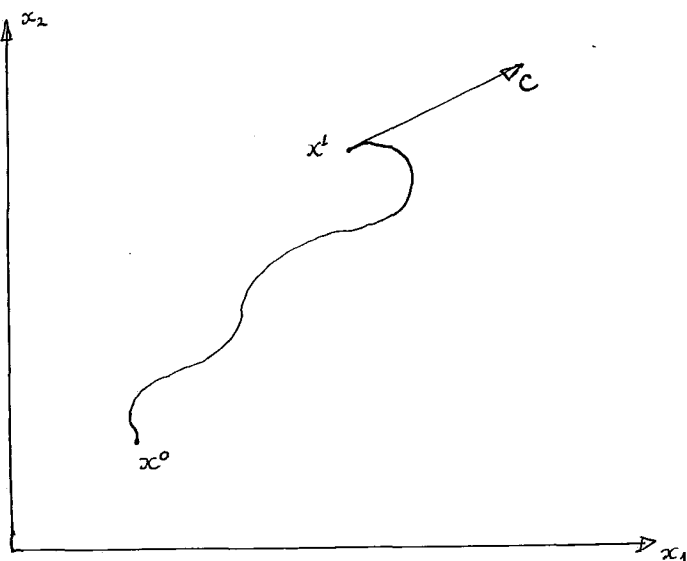
Neste ponto é preciso relembrar o vetor  $c$  usado na função critério (6):

$$S = \sum_{i=1}^n c_i x_i = c'x$$

Vamos relembrar também que maximizar a hamiltoniana implica que no instante final do controle  $\dot{x}(T)$  tenha direção contrária a  $c$ , isto é, no instante  $T$ ,  $x$  caminha na mesma direção do vetor  $c$ , porém com sentido contrário. Desse modo se pode perceber que:

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i$$

está sendo minimizada.



No presente caso, no instante final, deve ocorrer :

$$H(x, p, u, T^*) = \sum_{i=1}^n p_i(T^*) \dot{x}_i(T^*) = 0$$

Se a hamiltoniana fosse diferente de zero significaria ser possível caminhar mais um pouco no sentido contrário a  $c$  para se obter um valor um pouco menor da função critério. E isso é impossível porque o ponto alcançado em  $T^*$  minimiza a função

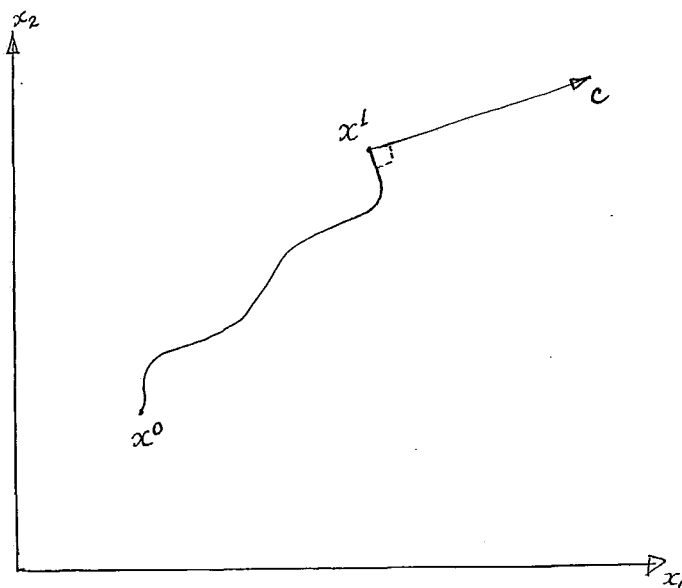


objetivo. A anulação da hamiltoniana em  $T^*$  significa que no ponto  $x(T^*)$ , o vetor  $\dot{x}(T^*)$  é ortogonal ao vetor  $c$ .

Pode-se usar

$$\sum_{i=1}^n p_i(T^*) \dot{x}_i(T^*) = 0$$

como mais uma equação de restrição do nosso sistema. E é esta restrição que permitirá determinar a nova incógnita,  $T^*$  que aparece no sistema.



Aplicando ao problema o princípio do máximo, temos o seguinte sistema a resolver:

$$H(x, p, u, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{x}_i - L(x, u, t)$$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\dot{x}_{n+1} = L(x, u, t)$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial x_i} \quad i=1, 2, \dots, n$$

e com a condição

$$\sum_{i=1}^n p_i(T^*) \dot{x}_i(T^*) = 0$$

A região  $G$  pode ser dada, da mesma maneira que das vezes anteriores, por

$$F(x_1, \dots, x_n) \leq 0$$

O segundo tipo de controle ótimo aparece quando se deseja realizar uma tarefa no menor prazo possível. Noutras palavras, agora queremos minimizar uma função critério do tipo:

$$S = \int 1 \, dt$$

Para resolver este problema o procedimento é o mesmo que normalmente temos seguido.

Definimos  $\dot{x}_{n+1} = L(x, u, t) = 1$

com a condição inicial  $x_{n+1}(0) = 0$

O vetor  $c$  é dado por

$$\begin{aligned} c_i &= 0 & i=1, 2, \dots, n \\ c_{n+1} &= 1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$S = \sum_{i=1}^n c_i x_i = x_{n+1} = \int dt$$

Da mesma forma que no problema da seção anterior,

$$\dot{p}_{n+1}(t) = 0$$

com a condição de contorno  $p_{n+1}(T) = -c_{n+1} = -1$

$$p_{n+1}(t) = -1$$

A hamiltoniana toma a forma:

$$H(x,p,u,t) = \sum_{i=1}^n p_i(t) \dot{x}_i(t) - 1$$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i=1,2,\dots,n$$

$$\dot{x}_{n+1} = 1$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial x_i} \quad i=1,2,\dots,n$$

$$\dot{p}_{n+1} = 0$$

com as condições de contorno

$$x_i(0) = x_i^0 \quad i=1,2,\dots,n$$

$$x_{n+1}(0) = 0$$

$$p_{n+1}(T) = -1$$

A região G fica dada, como sempre, por

$$F(x_1, \dots, x_n) \leq 0$$

Como o problema não tem tempo final predeterminado, vale aqui também a condição de anulação da hamiltoniana.

$$\sum_{i=1}^n p_i(T) \dot{x}_i(T) - 1 = 0$$

Esta é mais uma condição de restrição, que permite encontrar o tempo mínimo de percurso.

Vamos exemplificar o procedimento para chegar ao sistema de equações diferenciais do primeiro caso. Vamos usar o modelo muito conhecido de Holt, Modigliani, Muth e Simon .

Trata-se do modelo de um sistema de produção que possui um estoque  $I(t)$ , uma taxa de produção  $P(t)$  e uma demanda do produto fabricado  $S(t)$ . Existem ainda um estoque normal ou de regime  $\bar{I}$ , e uma taxa normal de produção  $\bar{P}$ .

Desvios dos valores normais de estoque e da taxa de produção implicam num aumento de custo. Esse aumento de custo pode ser aproximado por uma função quadrática:

$$C(t) = C_I(I(t) - \bar{I})^2 + C_P(P(t) - \bar{P})^2$$

onde  $C_I$  é uma constante relacionada com o custo de estoque;

$C_P$  é uma constante relacionada com o custo de produção.

Numa intervalo de tempo  $0, T$ , o aumento total do custo vai ser dado pela seguinte expressão:

$$CT(T) = \int_0^T (C_I(I(t) - \bar{I})^2 + C_P(P(t) - \bar{P})^2) dt$$

A variação do estoque está ligada com a taxa de produção e a demanda pela relação

$$\dot{I}(t) = P(t) - S(t)$$

Deseja-se verificar o tempo necessário para levar o estoque do nível normal,  $\bar{I}$ , para um nível  $I_1$ , minimizando o custo. É suposto que a demanda  $S(t)$  é perfeitamente conhecida. A variável de controle é  $P(t)$ .

Vamos definir:

$$X_1(t) = I(t)$$

$$\therefore \dot{X}_1(t) = P(t) - S(t)$$

$$\dot{X}_2(t) = C_I(I(t) - \bar{I})^2 + C_P(P(t) - \bar{P})^2$$

ou seja  $\dot{X}_2(t) = C_I(X_1(t) - \bar{I})^2 + C_P(P(t) - \bar{P})^2$

As condições de contorno são as seguintes:

$$X_1(0) = \bar{I}$$

$$X_2(0) = 0$$

$$X_1(T^*) = I_1$$

onde  $T^*$  é o instante final do controle, ainda desconhecido.

A hamiltoniana fica sendo

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{x}_i - L(x, u, t)$$

$$H = p_1 \dot{X}_1(t) - C(t)$$

$$H = p_1(P(t) - S(t)) - C_I(X_1(t) - \bar{I})^2 - C_P(P(t) - \bar{P})^2$$

$$\dot{p}_2 = 0$$

mas  $p_2(T^*) = -1$

$$\therefore p_2(t) = -1$$

$$H(T^*) = p_1(P(T^*) - S(T^*)) - C_I(X_1(T^*) - \bar{I})^2 - C_P(P(T^*) - \bar{P})^2 = 0$$

$$H(T^*) = p_1(P(T^*) - S(T^*)) - C_I(I_1 - \bar{I})^2 - C_P(P(T^*) - \bar{P})^2 = 0$$

E finalmente vamos ter o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\dot{p}_1 = -2C_I X_1(t)$$

$$\dot{X}_1(t) = P(t) - S(t)$$

$$\dot{X}_2(t) = C_I(X_1(t) - \bar{I})^2 + C_P(P(t) - \bar{P})^2$$

com as condições de contorno

$$X_1(0) = \bar{I}$$

$$X_1(T^*) = I_1$$

$$X_2(0) = 0$$

e ainda com a restrição

$$\begin{aligned} H(T^*) = (p_1 + 2C_p \bar{P})P(T^*) - C_p(P(T^*))^2 - p_1 S(T^*) - \\ - C_I(I_1 - \bar{I})^2 - C_p \bar{P} = 0 \end{aligned}$$

A solução deste sistema de equações, que tem  $T^*$  como uma das incógnitas, é que determina o tempo necessário para transferir o estoque do estado  $\bar{I}$  para um estado  $I_1$ , minimizando a função critério.

## Seção 5 - Quando as variáveis são discretas: comentários.

O que vimos até agora sempre se referiu a sistemas contínuos. Mas tudo o que foi visto aplica-se também a sistemas discretos, desde que o intervalo que separa dois valores sucessivos do tempo discretizado tenda para zero [16]. Essa é uma condição para sistemas discretos em geral, porque quando o sistema for linear em relação às variáveis de estado, o intervalo não precisa tender para zero. Os casos de interesse prático são justamente aqueles em que o intervalo entre dois valores de tempo é finito e bem definido, portanto nestes comentários só podemos nos interessar por sistemas lineares.

Digamos que o sistema discretizado assume os valores  $0, \tau, 2\tau, \dots, m\tau, \dots$  onde  $\tau$  é uma constante com dimensão de tempo. Então apresentamos o sistema discreto da seguinte maneira:

$$x_i^{m+1} - x_i^m = \tau f_i(x_1^m, \dots, x_n^m; u_1^m, \dots, u_r^m; m) \quad i=1, 2, \dots, n$$

onde  $x_i^m$  é o valor da variável  $x_i$  no instante  $m\tau$ ;

$u_i^m$  é o valor da variável  $u_i$  no instante  $m\tau$ ;

e  $m$  assume valores inteiros não-negativos.

No caso de sistemas lineares em  $x_i$ , que são os que nos estão interessando, a forma é:

$$x_i^{m+1} - x_i^m = \tau \left( \sum_{k=1}^n a_{ik}^m x_k^m + v_i(u_1^m, \dots, u_r^m) \right)$$

onde  $a_{ik}$  pode variar com o tempo,

e  $v_i(u_1^m, \dots, u_r^m)$  deve ser contínua.

O sistema de equações auxiliares e as variáveis auxiliares serão dadas por:

$$p_i^m - p_i^{m-1} = -\tau \sum_{s=1}^n p_s^m a_{si} = -\tau \sum_{s=1}^n p_s \frac{\partial f_s(x_1^m, \dots, x_n^m; u_1^m, \dots, u_r^m; m)}{\partial x_i} \quad i=1, 2, \dots, n$$

A hamiltoniana fica sendo:

$$H(x, p, u, m) = \tau \sum_{s=1}^n p_s f_s(x_1^m, \dots, x_n^m; u_1^m, \dots, u_r^m; m)$$

Pode-se notar que no caso das variáveis de estado, os seus valores no instante  $m+1$  são obtidos a partir do conhecimento dos valores das variáveis no instante  $m$ . E no caso das variáveis auxiliares, os valores no instante  $m-1$  são obtidos a partir do conhecimento dos valores do instante  $m$ .

## CAPITULO III

### CONTROLE ÓTIMO DE SISTEMAS LINEARES

#### Seção 1 - Introdução.

Examinando-se os exemplos do capítulo anterior pode-se ver que não é simples o procedimento para o cálculo do controle ótimo de um sistema. E esta parece ser a principal razão da pouca utilização dos métodos de controle ótimo a problemas práticos de produção.

Dantzig [6] apresenta um método baseado em programação linear generalizada que torna mais aplicável, em termos práticos, o controle ótimo a sistemas lineares.

Na próxima seção apresentamos a programação linear generalizada porque julgamos de importância o seu conhecimento para compreensão do método que a seguir, então, apresentaremos. Este método, desenvolvido por Dantzig em 1966, é apresentado na seção 3 juntamente com um exemplo.

#### Seção 2 - Programação Linear Generalizada.

Um problema de programação linear é comumente apresentado da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & z = c'x \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x_j \geq 0 \qquad j=1,2,\dots,n \end{array}$$



onde  $x$  é o vetor das variáveis,  $(n \times 1)$   
 $b$  é um vetor constante,  $(m \times 1)$   
 $c$  é um vetor constante,  $(n \times 1)$   
 $A$  é a matriz dos coeficientes das funções de restrição,  $(m \times n)$ .

Vamos definir os vetores  $A_j$  como as colunas da matriz  $A$ .

O que caracteriza a programação linear generalizada é que os vetores  $A_j$  associados às respectivas variáveis  $x_j$  não precisam ser constantes. Cada  $A_j$  variável deve pertencer a um conjunto convexo  $C_j$ , de onde pode ser escolhido convenientemente.

Os vetores  $P_j$  que normalmente nos textos de Programação Linear são definidos como as colunas de  $A$ , aqui serão definidos de maneira um pouco diferente:

$$P_j = \begin{bmatrix} A_j \\ c_j \end{bmatrix} \quad j=1,2,\dots,n$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

E vamos definir a matriz

$$P = [P_{ij}] = [P_0, P_1, \dots, P_n]$$

e fazemos

$$x_0 = -z$$

Ainda redefinimos  $x$  e  $b$ :

$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

O problema agora está transformado e pode ser reapresentado:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } x_0 \\ &\text{sujeito a } Px = b \\ &\quad x_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,n \\ &\quad x_0 \text{ não tem restrições de sinal.} \end{aligned}$$

Para resolver este problema usa-se o simplex revisado. O vetor multiplicador  $\pi$  é também definido de maneira um pouco diferente.

$$\pi' = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{m+1})$$

$$\pi' P_j = 0 \text{ se } x_j \neq x_0 \text{ é uma variável da base}$$

$$\pi' P_0 = 1$$

Pode-se perceber que  $\pi_{m+1} = 1$  porque

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \pi' P_0 = 1$$

A equação de custo gerada por estes multiplicadores é

$$\sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j$$

onde  $\bar{c}_j = \pi' P_j = \sum_{i=1}^m \pi_i p_{ij} + 1c_j$

Podemos neste ponto formular o problema de programação linear generalizada:

minimizar  $x_0$

sujeito a  $P_0 x_0 + P_1 x_1 + \dots + P_n x_n = b$

$$x_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,n$$

onde cada  $P_j$ ,  $j \neq 0$ , pode ser arbitrariamente escolhido dentro de um conjunto  $C_j$ . Estes conjuntos convexos são definidos por relações de igualdade ou de desigualdade. Quando essas relações são lineares, o conjunto é um poliedro convexo.

Para ilustrar melhor os procedimentos para a resolução de problemas de programação linear generalizada, vamos continuar sua apresentação usando o seguinte exemplo:

minimizar  $-x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a} \quad y_1 x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15 \\ y_2 x_1 + x_2 + 5x_3 &= 20 \\ y_3 x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \end{aligned}$$

onde  $y_1, y_2$  e  $y_3$  devem satisfazer a condição

$$y_1 + y_2 + y_3 = 4$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Na forma padrão de programação linear generalizada teremos:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ -1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Este sistema não é linear por causa dos termos  $y_i x_1$ , mas para transformá-lo em linear basta fazer

$$y_1 x_1 = u_1$$

$$y_2 x_1 = u_2$$

$$y_3 x_1 = u_3$$

e

$$y_1 x_1 + y_2 x_1 + y_3 x_1 = 4x_1$$

ou seja  $u_1 + u_2 + u_3 = 4x_1$

Obteríamos assim um sistema linear que poderia ser resolvido usando o simplex, por exemplo. Mas acontece que desta maneira poderíamos obter soluções do tipo  $x_1 = 0$  e  $u_1 \neq 0$ , que não são coerentes. Para evitar isso vamos utilizar mesmo a sua forma original, não linear.

Vamos supor conhecida uma solução viável para o problema não linear, da qual não faz parte a variável  $x_1$ . Essa solução viável é:

$$x_0 = 90/7$$

$$x_2 = 15/7$$

$$x_3 = 25/7$$

$$x_4 = 15/7$$

$$x_1 = 0$$

e o vetor multiplicador é:

$$\eta = \begin{bmatrix} 16/7 \\ -4/7 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e temos  $\eta' P_0 = 1$

$$\eta' P_2 = 0$$

$$\eta' P_3 = 0$$

$$\mathcal{P}'P_4 = 0$$

$$\mathcal{P}'P_1 = \frac{16}{7}y_1 - \frac{4}{7}y_2 - y_3 - 1$$

Se  $\mathcal{P}'P_1 \geq 0$  então a atual solução viável já é ótima. Se  $\mathcal{P}'P_1 < 0$  então a solução do problema pode ser melhorada, e ainda, quanto menor for o valor de  $\mathcal{P}'P_1$  melhor será a nova solução. Daí se depreende que devemos escolher  $y_1$ ,  $y_2$ , e  $y_3$  de modo a minimizar  $\mathcal{P}'P_1$ .  $y_1$ ,  $y_2$ , e  $y_3$  devem satisfazer ainda a condição:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 4$$

Como se pode notar, temos neste caso um problema de programação linear auxiliar. Este sub-programa linear é enunciado do seguinte modo:

$$\text{minimizar } \mathcal{P}'P_1 = \frac{16}{7}y_1 - \frac{4}{7}y_2 - y_3 - 1$$

$$\text{ou seja, minimizar } z = \frac{16}{7}y_1 - \frac{4}{7}y_2 - y_3$$

$$\text{sujeitoma } y_1 + y_2 + y_3 = 4$$

Este problema é muito simples de resolver e imediatamente vemos que a solução ótima é

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = 0$$

$$y_3 = 4$$

$$z = -4$$

$$\text{e } \mathcal{P}'P_1 = -5 < 0$$

Estes valores podem ser substituídos em (1) e então  $x_1$  entra na base e sai  $x_4$ .

Não podemos simplesmente substituir  $y_1$ ,  $y_2$ , e  $y_3$  pelos seus valores porque pode ocorrer que no desenvolver da otimização do problema principal os valores ótimos de  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$

venham a ser diferentes dos obtidos agora. Por isso, ao mesmo tempo que substituímos os valores de  $y_1$ ,  $y_2$ , e  $y_3$ , introduzimos no sistema outro vetor de coeficientes variáveis. Assim:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} x_1' + \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \\ -1 \end{bmatrix} x_1'' + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

onde  $x_1 = x_1' + x_1''$

$$y_1'' + y_2'' + y_3'' = 4$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{x_1'}{x_1' + x_1''} + \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \\ -1 \end{bmatrix} \frac{x_1''}{x_1' + x_1''}$$

Agora  $P$  tem mais uma coluna,  $P_5$

$$P_5 = \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \\ -1 \end{bmatrix}$$

O novo vetor multiplicador é

$$\pi = \begin{bmatrix} 19/28 \\ 1/7 \\ 1/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

E temos  $\pi' P_0 = 1$

$$q'P_1 = 0$$

$$q'P_2 = 0$$

$$q'P_3 = 0$$

$$q'P_4 = 5/4$$

Agora vamos verificar se  $q'P_5$  pode ter valor negativo. Neste caso entrará na base. Portanto, vamos resolver outro problema auxiliar de programação linear.

$$\text{minimizar } q'P_5 = \frac{19}{28}y_1'' + \frac{1}{7}y_2'' + \frac{1}{4}y_3'' - 1$$

$$\text{ou seja, minimizar } z = \frac{19}{28}y_1'' + \frac{1}{7}y_2'' + \frac{1}{4}y_3''$$

$$\text{sujeito a } y_1'' + y_2'' + y_3'' = 4$$

A solução deste problema é imediata:

$$y_1'' = 0$$

$$y_2'' = 4$$

$$y_3'' = 0$$

$$z = \frac{4}{7}$$

$$q'P_5 = \frac{4}{7} - 1 = -\frac{3}{7} < 0$$

Estes valores podem ser substituídos em (2) e então  $x_1''$  entra na base e sai  $x_1'$ . Depois desta iteração chegamos a um outro vetor multiplicador:

$$q = \begin{bmatrix} 7/16 \\ 1/4 \\ 7/16 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Repetindo o mesmo procedimento dos sub-problemas anteriores vamos encontrar o seguinte resultado:

$$\pi' P_6 = z - 1 = 0$$

Portanto  $P_6$  não entra na base. E a atual solução do problema principal já é a solução ótima. As variáveis básicas são  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_1$ , com os valores  $15/4$ ,  $5/2$  e  $15/16$  respectivamente.

Resumindo o que acabamos de ver, podemos dizer que havia um problema de programação linear principal, ou problema mestre. Em cada iteração de sua otimização tínhamos que resolver outro problema menor, de otimização, que era o sub-problema auxiliar. Este sub-problema consistia em encontrar dentro de um conjunto convexo  $C_j$  um vetor  $\bar{P}_j$  que minimizasse a expressão  $\pi' P_j$ . Em toda iteração em que se empregava este sub-problema de otimização, era acrescentado ao problema principal mais uma variável acompanhada de uma coluna de coeficientes variáveis. Assim, durante o processo de otimização, novas colunas eram geradas. Neste ponto surge a dúvida sobre o número de colunas ter possibilidade de aumentar indefinidamente. No programa que acabamos de ver, os conjuntos  $C_j$  podem ser considerados como poliedros convexos limitados e, portanto, os sub-problemas podiam ser resolvidos por programação linear. Nos casos deste tipo, se a solução do problema principal é melhorada a cada passo, isto é, não há degeneração, e se o número de passos que damos nos  $C_j$  para melhorar a solução do problema principal também é finito, então, o número de colunas geradas também é finito. Pode-se provar[5] , cap.22 que quando os  $C_j$  são poliedros convexos e limitados, o número de colunas geradas também é finito.

Quando o conjunto  $C$ , formado pelos  $C_j$  for limitado, convexo mas não poliédrico, então o número de colunas que podem ser geradas pode ser infinito. Isto quer dizer que durante a solução do problema principal vamos gerando uma sequência,  $K$ , infinita de novas colunas  $P_k$  e de vetores multiplicadores  $\pi_k$ ,  $k \leq K$ .



$k \in K$ . Entretanto, é possível provar[5] , cap.24 que se a solução viável inicial do problema principal for não degenerada e se o conjunto  $C$  é limitado, então existe uma sub-sequência de  $K$ ,  $K'$ , tal que  $P_{k'}$  e  $\mathcal{P}_{k'}$  convergem,  $k' \in K'$ . Isto é

$$\lim_{k' \rightarrow \infty} P_{k'} = P^*$$

$$\lim_{k' \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{k'} = \mathcal{P}^*$$

$P^*$  é um vetor de coeficientes que entra na base final do problema principal de programação linear.

### Seção 3 - O problema de controle ótimo linear.

O controle ótimo de sistemas dinâmicos lineares pode ser obtido por meio da aplicação do método da programação linear generalizada que acabamos de ver. Os

Os problemas de controle ótimo que vimos no capítulo II eram apresentados da forma que segue: transferir um sistema do estado  $x^0$  para o estado  $x^1$ , durante o intervalo de tempo  $[0, T]$ , otimizando a função<sup>nal</sup> critério

$$x_0(T) = \int_0^T f_0(x, u, t) dt .$$

O sistema, quando linear, é apresentado na forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

com as condições de contorno

$$x(0) = (0, x_1^0, \dots, x_n^0)$$

$$x(T) = (x_0^1, x_1^1, \dots, x_n^1)$$

onde  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)'$  é o vetor das variáveis  
 $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)'$  é o vetor controle,  $u \in U$  convexo.  
 $A$  é uma matriz constante  $(n+1) \times (n+1)$   
 $B$  é uma matriz constante  $(n+1) \times r$

O problema consiste em encontrar o controle  $u(t) \in U$ ,  
 $t \in [0, T]$  que satisfaz as condições acima estabelecidas.

Quando  $u(t)$  é conhecido, a solução de um sistema do tipo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

é dada por

$$x(T) = e^{AT}x(0) + e^{AT} \int_0^T e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

e particularmente

$$x(T) = e^{AT}x(0) + e^{AT} \int_0^T e^{-At} Bu(t) dt \quad (3)$$

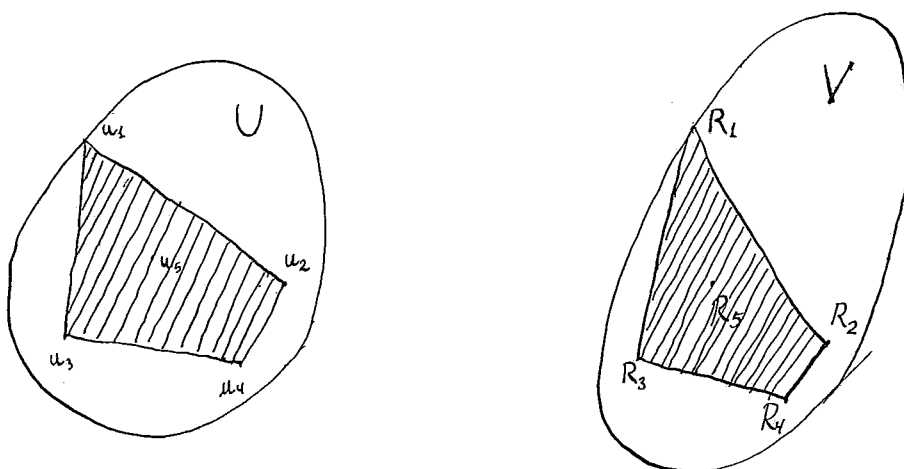
No nosso caso ainda não conhecemos  $u(t)$ , por isso precisamos procurá-lo, e que seja tal que minimize  $x_0(T)$  e que  $x(T) = x^1$ . Para isso vamos começar definindo:

$$R = \int_0^T e^{A(T-t)} Bu(t) dt$$

$$V = \left\{ R \mid R = \int_0^T e^{A(T-t)} Bu(t) dt, u(t) \in U \right\}$$

$V$  é convexo porque  $U$  é convexo e a expressão de  $R$  envolve apenas relações lineares.

Vamos supor agora que conhecemos um conjunto de  $q$  vetores  $u_i \in U$ ,  $\{u_i\}$ ,  $i=1,2,\dots,q$ ;  $q \geq n+1$ . Usando este conjunto de controles  $\{u_i\}$  podemos obter  $\{R_i\}$ , um conjunto de  $q$  vetores  $R_i \in V$ . Por causa da convexidade de  $U$  e  $V$ , os contornos convexos de  $\{u_i\}$  e  $\{R_i\}$  estão contidos em  $U$  e  $V$  respectivamente.



Se dentro do poliedro formado pelo contorno de  $\{u_i\}$  conhecemos um vetor controle  $u_f$  que satisfaz (3)<sup>vt</sup>, então conhecemos uma solução viável do problema de controle. Por meio de programação linear podemos otimizar a sua solução para valores de  $u(t)$  pertencentes ao poliedro. O problema de programação linear é enunciado da seguinte maneira:

$$\text{minimizar } x_0(T)$$

$$\text{sujeito a } e^{AT}x(0) + \sum_{i=1}^q \mu_i R_i = x(T) \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^q \mu_i = 1$$

$$\mu_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,q$$

onde  $\mu_i$  são as variáveis

$R_i \in V$  são os vetores obtidos a partir do conjunto  $\{u_i\}$ .

$R_i$  são vetores  $(n+1) \times 1$

Aplicando o simplex revisado a este problema podemos encontrar um vetor  $\bar{R}$  pertencente a  $V$  que minimiza  $x_0(T)$ . Também nesta otimização determinamos o vetor multiplicador do sim-

plex revisado associado à solução ótima,

$$\pi' = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n+1}) = (\pi'_1, \pi_{n+1}) .$$

Agora acrescentaremos ao problema (4) mais uma coluna de coeficientes  $R_{q+1}$  e mais uma variável  $\mu_{q+1}$ , tal que

$$\sum_{i=1}^{q+1} \mu_i = 1.$$

$R_{q+1}$  é um vetor não pertencente ao poliedro convexo já definido.  $R_{q+1}$  deve ser escolhido convenientemente para que

$$\bar{c}_{q+1} = \pi' R_{q+1} + \pi_{n+1} < 0$$

Se isso não ocorrer para algum  $R \in V$  então a solução encontrada na programação linear que fizemos, também é ótima para todo  $R \in V$ .

Para procurar o  $R_{q+1}$  com as características acima, usamos um problema de otimização:

$$\text{minimizar } \pi'_1 R + \pi_{n+1}$$

$$\text{sujeito a } R \in V$$

ou, o que é a mesma coisa,

$$\text{sujeito a } u \in U$$

Como  $\pi_{n+1}$  é uma constante, este problema pode ser enunciado

$$\text{minimizar } \pi'_1 R$$

ou ainda,

$$\text{minimizar } \pi'_1 \int_0^T e^{A(T-t)} B u(t) dt$$

ou

$$\text{minimizar } \int_0^T \pi_1' e^{A(T-t)} B u(t) dt$$

ou ainda, podemos minimizar o integrando em cada instante, isto é,

$$\text{minimizar } \pi_1' e^{A(T-t)} B u(t) \quad \text{em cada } t \in [0, T].$$

$$\text{Fazendo } \rho(t) = (\rho_0(t), \rho_1(t), \dots, \rho_n(t)) = \pi_1' e^{A(T-t)} B$$

temos finalmente o problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \rho(t) u(t) \quad \text{para cada } t \in [0, T] \\ &\text{sujeito a } u(t) \in U \end{aligned} \tag{5}$$

Se a solução deste problema for tal que  $\pi_1' R_{q+1} + \pi_{n+1} < 0$ , então a introdução da coluna

$$\begin{bmatrix} R_{q+1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

na base do problema (4) melhora sua solução. Como se vê, estamos tratando de um problema de programação linear generalizada.

Se  $U$  for um poliedro convexo, então o problema (5) pode ser resolvido num número finito de passos para cada  $t \in [0, T]$ , pois (5) é um problema de programação linear. Particularmente, se o conjunto  $U$  for determinado pelos limites inferiores e superiores de cada componente  $u_j(t)$  de  $u(t)$ , então cada uma dessas componentes terá em cada instante  $t$  o valor do limite que minimize  $\rho(t)u(t)$ , noutras palavras, o controle será do tipo bang-bang.

Se  $U$  for um conjunto qualquer, não poliédrico, vimos que sob certas condições é possível resolver o problema prin-

principal, pois existe uma sub-sequência de vetores  $\begin{bmatrix} R_k \\ 1 \end{bmatrix}$ , que vão sendo gerados, que converge para um vetor ótimo  $\begin{bmatrix} R^* \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Por isso mesmo existe uma sub-sequência de controles  $u(t) \in U$  que converge para um controle  $u^*(t)$ . O controle ótimo a ser aplicado ao sistema (3) será dado neste caso por uma combinação linear de  $n+1$  controles correspondentes às  $n+1$  colunas da base final do problema de programação linear (4):

$$u^*(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i u_i(t) .$$

Vamos ilustrar este método resolvendo o problema de uma oficina que produz determinadas peças em lotes. A oficina produz as peças a uma velocidade que é dada pela equação:

$$\dot{P}(t) = k_1 M(t) + k_2 H(t) \quad P(0) = 0$$

onde  $M(t)$  é o número de máquinas sendo utilizadas no instante  $t$ .

$H(t)$  é o número de operários sendo utilizados no instante  $t$ .

O prazo para produção de um lote é fixo e tem a duração de 10 dias, isto é,  $t \in [0, 10]$ .

Deseja-se produzir um lote de 1000 peças minimizando uma função critério:

$$S = \int_0^T (P(t) - k_3 M(t) - k_6 H(t)) dt$$

As condições de contorno são:

$$P(0) = 0$$

$$P(T) = P(10) = 1000$$

As variáveis de controle sobre as quais podemos atuar são  $M(t)$  e  $H(t)$ .

Vamos definir

$$\dot{S}(t) = P(t) - k_3 M(t) - k_6 H(t)$$

com a condição inicial

$$S(0) = 0$$

Podemos representar o sistema na forma vetorial:

$$\begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ -k_3 & -k_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ H \end{bmatrix}$$

ou, de outra forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} P \\ S \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} M \\ H \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ -k_3 & -k_6 \end{bmatrix}$$

A solução deste sistema é:

$$x(T) = x(0)e^{AT} + \int_0^T e^{A(T-t)} Bu(t) dt$$

O vetor controle  $\begin{bmatrix} M \\ H \end{bmatrix}$  que pode ser usado na operação

do sistema deve pertencer ao conjunto de controles admissíveis definido por:

$$2 \leq M(t) \leq 10$$

$$2 \leq H(t) \leq 10$$

Os valores das constantes são:

$$k_1 = 20 \frac{\text{peças}}{\text{máquina.dia}}$$

$$k_2 = 10 \frac{\text{peças}}{\text{homem.dia}}$$

$$k_3 = 1 \frac{\text{peça}}{\text{máquina}}$$

$$k_6 = 1 \frac{\text{peça}}{\text{homem}}$$

Cálculo de  $e^{At}$ :

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 = 0 \quad \dots \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} a+bt \\ c+dt \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

$$(A - \lambda I)V_2 = 0 \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 1 & -\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{matrix} A=0 \\ B=1 \end{matrix} \quad V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)V_2 = V_1 \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+bt \\ c+dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a+bt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} a=1 \\ b=0 \end{matrix} \quad \therefore \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = (V_1 \quad V_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo de  $e^{-At}$ :

$$\text{é fácil verificar que } e^{-At} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora vamos calcular  $R = e^{AT} \int_0^T e^{-At} B u dt$  :



$$e^{-At_B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 20 & 10 \end{bmatrix}$$

$$e^{-At_{Bu}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 20 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M & -H \\ 20M + 10H \end{bmatrix}$$

$$\int_0^T e^{-At_{Budt}} = \begin{bmatrix} -\int_0^T (M+H) dt \\ \int_0^T (20M+10H) dt \end{bmatrix}$$

Como o sistema é linear, já sei que o controle é bang-bang. Para o cálculo dos  $R_i$  iniciais posso considerá-los apenas bang. Então,

$$\int_0^{10} e^{-At_{Budt}} = \begin{bmatrix} -(M+H)10 \\ 200M + 100H \end{bmatrix}$$

$$e^{A10} \int_0^{10} e^{-At_{Budt}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10M-10H \\ 200M+100H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200M + 100H \\ -10M - 10H \end{bmatrix}$$

Fazendo

$$\begin{bmatrix} R \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200M + 100H \\ -10M - 10H \end{bmatrix}$$

podemos obter o seguinte conjunto de pontos de V.

ponto 1:	M=2 H=2	$R_1 = 600$	$S_1 = -40$
ponto 2:	M=2 H=7	$R_2 = 1100$	$S_2 = -90$
ponto 3:	M=5 H=10	$R_3 = 2000$	$S_3 = -150$

E vamos obter o seguinte problema principal de pro-

programação linear:

$$\text{maximizar } S(T)$$

$$\text{sujeito a } \mu_1 R_1 + \mu_2 R_2 + \mu_3 R_3 = 1000$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$$

ou seja:

$$\text{minimizar } -S(T) = 40\mu_1 + 90\mu_2 + 150\mu_3 = 1000$$

$$\text{sujeito a } 600\mu_1 + 1100\mu_2 + 2000\mu_3 = 1000$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$$

Uma solução viável para este problema é:

$$\mu_1 = 0,2$$

$$\mu_2 = 0,8$$

$$\mu_3 = 0$$

Aplicando-se ao problema o método simplex revisado encontramos a seguinte solução ótima:

$$\mu_1 = 5/7$$

$$\mu_2 = 0$$

$$\mu_3 = 2/7$$

$$\pi_1 = \begin{bmatrix} -11/140 \\ 50/7 \end{bmatrix}$$

$$P(t) = \pi_1 e^{A(T-t)} B = \begin{bmatrix} -11/140 & 50/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -61/7 & -111/14 \end{bmatrix}$$

Agora então vamos ter o nosso primeiro problema auxiliar de programação linear: Pois devemos procurar um vetor  $R_4$  para acrescentar ao problema principal.

$$\text{minimizar } P(t)u(t)$$

$$\text{sujeito a } u(t) \in U$$

ou seja, minimizar  $-\frac{61}{7}M - \frac{111}{14}H$

sujeito a  $H \leq 10$

$-H \leq -2$

$M \leq 10$

$-M \leq -2$

A solução ótima deste sub-problema é fácil de ser encontrada :

$$M = 10$$

$$H = 10$$

A essa solução corresponde:  $R_4 = 3000$   $S_4 = 200$

E uma nova coluna é acrescentada ao problema principal:

minimizar  $40\mu_1 + 90\mu_2 + 150\mu_3 + 200\mu_4$

sujeito a  $600\mu_1 + 1100\mu_2 + 2000\mu_3 + 3000\mu_4 = 1000$

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 1$$

A solução ótima deste problema é

$$\mu_1 = 5/6$$

$$\mu_2 = 0$$

$$\mu_3 = 0$$

$$\mu_4 = 1/6$$

$$\pi_1 = \begin{bmatrix} -1/15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vamos obter agora mais um problema auxiliar para procurar mais uma coluna para entrar na base do problema principal.

$$\rho(t) = \mathcal{W}_1 e^{A(T-t)} \text{Bud} = \begin{bmatrix} -\frac{20}{15} & -\frac{10}{15} \end{bmatrix}$$

e teremos: minimizar  $-\frac{20}{15}M - \frac{10}{15}H$

sujeito a  $H \leq 10$

$$-H \leq -2$$

$$M \leq 10$$

$$-M \leq -2$$

A solução ótima deste sub-problema é novamente

$$M = 10$$

$$H = 10$$

Então obtemos  $R_5 = R_4 \therefore \mathcal{W}R_5 = 0$

Portanto, acrescentar nova coluna ao problema principal não vai conduzir a uma solução ótima melhor. E a solução atual do problema principal já é a ótima:

$$\bar{u} = \frac{5}{6}u_1 + \frac{1}{6}u_4$$

$$u(t) = \frac{5}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Esta resposta é, pelo menos aparentemente, um pouco estranha, pois estávamos esperando um controle bang-bang e o resultado das computações nos dá um resultado que é média ponderada de dois controles extremos. A causa desta discrepância é o fato de  $\rho(t)$  ser constante. E  $\rho(t)$  é constante porque  $-At$  é uma matriz que neste caso particular é constante. De qualquer maneira, o resultado encontrado pode ser interpretado do seguinte modo: 5/6 do tempo o controle deve ser  $M=2$ ,  $H=2$ ,

e  $1/6$  do tempo o controle é  $M=10$ ,  $H=10$ . Mas existe outro detalhe ainda não explicado: qual dos controles deve ser aplicado primeiro;  $(2,2)$  ou  $(10,10)$ ? Um exame da apresentação do problema revela que não há importância no fato de qualquer um dos controles ser aplicado antes ou depois. Se essa importância existisse deveria se fazer notar através de  $\rho(t)$ , em cada sub-problema.

## CAPITULO IV

### CONCLUSÃO

A causa principal da pouca utilização da teoria do Controle Ótimo no tratamento de sistemas de produção é a complexidade das computações que é preciso fazer. Veja-se os exemplos do capítulo II. São sistemas muito simples, com relações simples entre as variáveis, que são poucas. No entanto, ao procurar o controle ótimo, o número de computações que foi preciso fazer foi muito grande, e o tipo de cálculos não foi muito simples. Quando o número de variáveis cresce, o número de computações cresce muito mais. Pode-se dizer que enquanto o número de variáveis cresce como uma progressão aritmética, o número de computações cresce como uma progressão geométrica. Um sistema de produção geralmente possui um número bastante grande de variáveis. Então, mesmo que as relações entre as variáveis sejam simples, lineares por exemplo, o número e o tipo de computações que é preciso fazer desaconselham o uso de métodos de controle ótimo.

A Simulação tem se revelado um método bastante eficiente no tratamento de modelos de sistemas de produção. Mas a procura do controle ótimo, ou pelo menos de um bom controle, na simulação é feito por tentativas. E esta procura por tentativas pode levar um tempo maior do que o razoável. Mas acontece também que sistemas de produção estão muito sujeitos a perturbações e influências de fatores externos ao sistema. Por isso, não se pode pretender a aplicação prática de um controle ótimo na execução de uma tarefa. Na maioria dos casos basta ter uma idéia, até bastante qualitativa, do controle a aplicar. Podemos então fazer o que fizemos no capítulo II. Sim-

plificar bastante o modelo e encontrar o controle ótimo deste modelo muito simplificado. Devido às simplificações não podemos dizer que o mesmo controle é ótimo para o modelo mais fiel, mas, pelo menos qualitativamente, dará uma idéia do controle a aplicar no sistema. O que, num sistema complexo, já é de muita utilidade. Por outro lado, a idéia qualitativa do controle a ser aplicado é muito útil quando, na simulação do modelo mais realista, é preciso encontrar por tentativas o controle ótimo.

No capítulo III apresentamos um método que pode facilitar muito a computação do controle ótimo de sistemas lineares. Entretanto, mesmo neste método ainda existe um ponto não solucionado. É o caso do sub-problema de programação linear

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \int_0^T u(t) \, dt \quad \text{para todo } t \in [0, T] \\ &\text{sujeito a} \quad u(t) \in U \end{aligned}$$

que foi apresentado na página 95. Como se vê, há um problema de programação linear para cada instante  $t \in [0, T]$ . Ora, não é possível resolver um problema desses para cada instante. Mas pode-se discretizar o tempo e então resolver o problema para cada valor do tempo discretizado. Esta continua sendo a maneira mais aconselhável de resolvê-lo. Existem estudos sobre a solução deste tipo de problemas que se chamam de Programação Linear Contínua [14].

No capítulo III o que fizemos foi transformar nosso problema de controle ótimo num problema de programação matemática. Obtivemos um algoritmo hierarquizado de dois níveis; um típico problema de programação matemática de grande porte. Sob o ponto de vista da programação matemática, poderíamos dizer que o que foi feito no capítulo III foi uma manipulação do problema original, para colocá-lo numa forma mais adequada à sua solução.

Tentamos nesta tese verificar até que ponto é possível aplicar alguns elementos da teoria de Controle Ótimo a modelos dinâmicos de sistemas de produção. Damos uma certa ênfase a modelos utilizados em Dinâmica Industrial. Verificamos que existe muita dificuldade em aplicar os métodos convencionais de controle ótimo a sistemas com um número não pequeno de variáveis. Uma maneira de contornar esta dificuldade é simplificar bastante o modelo do sistema. Quando o modelo for linear existe a possibilidade de transformar o problema num problema de programação matemática de grande porte e então resolvê-lo. Quando o modelo for não linear ainda pode ser possível transformá-lo problema num de programação matemática [10]. Mas a solução deste último problema ainda não pode ser encontrada por causa de problemas ainda não solucionados na teoria da Programação Matemática.



# BIBLIOGRAFIA

1. ANSOFF, H.I.; SLEVIN, D.P. - "An Appreciation of Industrial Dynamics". Management Science. vol.14, N°7, March 1968 - USA.
2. ASTROM, K.J.; EYKHOFF, P. - "System Identification-A Survey". Automatica. vol.7, p 123-162. Pergamon Press 1971 - Great Britain.
3. BUFFA, Elwood S. - "Production and Operations Management". John Wiley & Sons, Inc. 1966 - USA.
4. CONNORS, M.M.; TEICHROEW, D. - "Optimal Control of Dynamic Operations Research Models". International Text-book Company. 1967 - USA.
5. DANTZIG, G.B. - "Linear Programming and Extensions". Princeton University Press. 1963 - USA.
6. DANTZIG, G.B. - "Linear Control Processes and Mathematical Programming". Journal of SIAM on Control. vol.4 N° 1 1966, p 56-60. - USA.
7. ERICSON, R.F. - "The Impact of Cybernetic Information Technology on Management Value Systems". Management Science. vol.16 N° 2, October 1969 - USA.
8. FORRESTER, J.W. - "Industrial Dynamics". The M.I.T. Press. 1961 - USA.
9. FORRESTER, J.W. - "Industrial Dynamics-After the First Decade". Management Science. vol. 14 N° 7 March 1968 - USA.
10. GONZAGA, C.C. - "Redução de Alguns Problemas de Controle Ótimo a Problemas de Programação Matemática". Tese de Mestrado. COPPE - 1970 - Brasil.
11. GORRY, G.A. - "The Development of Managerial Models". Sloan Management Review. vol.12 N° 2, Winter 1971 - USA.

12. HOLT, C.C.; MODIGLIANI, F.; MUTH, J.; SIMON, H.A. - "Planning Production, Inventories, and Work Forces". Prentice Hall, Inc. 1960 - USA.
13. LASDON, L.S. - "Optimization Theory for Large Systems". The MacMillan Company. 1970 - USA.
14. ORTEGA, J.A. - "Programação Contínua: Propriedades das Soluções". Tese de Mestrado. COPPE: 1971 - Brasil.
15. REISMAN, A.; BUFFA, E.S. - "A General Model for Production and Operations Systems". Management Science. vol.11 Nº 1, September 1964. - USA.
16. ROZONER, L.I. - "Pontryagin's Maximum Principle in the Theory of Optimum Systems". I, II, III. 1959 em Automatica. Em 1966 em "Optimal and Self-Optimizing Control" editado por R. Oldenburger. The M.I.T. Press. 1966 - USA.
17. SENGUPTA, J.K.; FOX, K.A. - "Optimization Techniques in Quantitative Economic Models". North-Holland Publishing Company. 1969 - Amsterdam.
18. STARR, M.K. - "Systems Management of Operations". Prentice Hall, Inc. 1971 - USA.